



**DELHI UNIVERSITY  
LIBRARY**

# DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B32 168N29.1

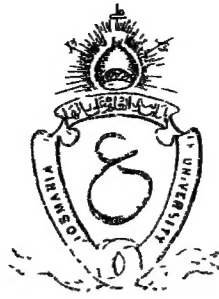
Ac. No. 10383

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 0.5 nP. will be charged for each day the book is kept overtime.

---





سلسلہ کتب اسلامیہ

# صغاری احصاء

جلد اول

تصنیف

ہویرین لمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی، ایس۔ سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے وکشن چندا ایم۔ اے

پروفیسر ان کلمیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۷ھ ۱۳۲۸ھ ۲۹ جولائی

الطبع عند دارالکتاب العربیہ

یہ تمام سرزمینیں اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو  
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کر کے  
طبع و شایع کی گئی ہے

## دیباچہ (از مُصنّف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصائے اَنْ حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفا علون کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفا عل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{فرما}{فلا} = ما$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفا عل کی اہمیت کرباضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو مضابطہ کہلائے جائیگا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن یہ کہنا بیجا نہ ہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصائے تعلوق کے مد نظر

کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔  
 لاتنا ہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور ان کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل  
 میں لائی گئی ہیں پہلی اشاعتوں میں ان سلسلوں پر یکساں استثنیٰ تاق کے نظریہ کی  
 مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی، احصائی کتاب میں اس وقت اس نظریہ  
 کا داخل کر لیا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا  
 لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوہر ہو گیا  
 وجہ سے اب اسکو ترک کر دیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے  
 جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں  
 سے طالب علم کو واسطہ پڑے گا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج  
 تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکوزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں  
 اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف  
 کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط  
 جون ۱۹۱۹ء

ہوریس لیب

# فہرست مضامین

صفحہ	مضمون	صفحہ
	پہلا باب	
	سلسلہ تغیر سے پہلے انتہا	۱
۱	تو اثر کی علوی یا سفلی انتہا	۲
۳	لا متناہی سلسلوں پر استتعال - مثبت رقموں والے سلسلے	۳
۷	تو اثر میں انتہائی قیمت -	۴
۱۰	لا متناہی سلسلوں پر استتعال	۵
۱۵	تفاعل کی عام تعریف	۶
۲۰	تفاعل کی ہندسی تعبیر	۷
۲۲	سلسلہ تفاعل کی تعریف	۸
۲۴	سلسلہ تفاعل کی خاصیت	۹
۲۵	سلسلہ تفاعل کی ترسیم	۱۰
۲۷	عدم تسلسل	۱۱
۲۹	سلسلہ تفاعل سے متعلق مسائل	۱۲
۳۱	جبری تفاعل - منطق صحیح تفاعل	۱۳
۳۴	منطق کسری	۱۴
۳۶		



۴۰	دائری تفاعل	۱۵
۴۲	مقلوب تفاعل	۱۶
۴۵	گروہ کی علوی یا سفلی انتہا	۱۷
	مسلسل تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے	۱۸
۴۷	قیمت ہوتی ہے۔	
۵۰	تفاعل کی انتہائی قیمت	۱۹
۵۱	انتہائی قیمتوں سے متعلق عام مسائل	۲۰
۵۲	مثالیں۔	۲۱
۵۴	چند خاص انتہائی قیمتیں	۲۲
۵۷	صفاریات	۲۳
۵۹	مشئلہ نمبری ۱، ۲، ۳، ۴	
	<b>دوسرا باب</b>	
	<b>مشتق تفاعل</b>	
۶۶	تہید۔ ہندسی توضیحات	۲۴
۶۸	مشتق تفاعل کی عام تعریف	۲۵
۷۱	طبعی مثالیں	۲۶
۷۳	تفرق ابتدائی اصولوں سے	۲۷
۷۴	معیاری تفاعلوں کا تفرق	۲۸
۷۶	سادہ قسم کے مجموعوں کو تفرق کر کے ضابطے۔ حامل جمع کا لفظ	۲۹
۷۷	حاصل ضرب کا تفرق	۳۰
۸۰	خارج قسمت کا تفرق	۳۱
۸۲	تفاعل کے تفاعل کا تفرق	۳۲
۸۵	مقلوب تفاعلوں کا تفرق	۳۳

۹۰	دو یا زیادہ متبوع متغیرون کے تفاعل - جزوی مشتقات -	۳۴
۹۲	تضمینی تفاعل	۳۵
۹۴	امثلہ نمبری ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵	
	<b>تقسیم باب</b>	
	<b>قوت نما اور لوکار تہی تفاعل</b>	
۱۰۳	قوت نما تفاعل	۳۶
۱۰۴	سلسلہ قوت نما	۳۷
۱۰۸	مسئلہ جمع - ق (لا) کی ترسیم	۳۸
۱۱۰	عدد ہو	۳۹
۱۱۲	زائدی تفاعل	۴۰
۱۱۶	زائدی تفاعلوں کا تفرق	۴۱
۱۱۷	لوکار تہی تفاعل	۴۲
۱۱۹	چند انتہائی قیمتیں	۴۳
۱۲۲	لوکار تہی کا تفرق	۴۴
۱۲۴	لوکار تہی تفرق	۴۵
۱۲۵	مقلوب زائدی تفاعل	۴۶
۱۲۶	مقلوب زائدی تفاعلوں کا تفرق	۴۷
۱۲۷	امثلہ نمبری ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴	
	<b>چوتھا باب</b>	
	<b>مشتق تفاعل کا استعمال</b>	
۱۳۴	مشتق تفاعل کی علامت سے نتائج	۴۸
۱۳۹	تفاعل کی دو مساوی قیمتوں کے درمیانی وقفہ میں مشتق صفر ہوتا ہے	۴۹
۱۴۰	مساواتوں کے نظریہ میں استعمال	۵۰

۱۴۲	اعظم اور اقل قیمتیں	۵۱
۱۴۹	جبریہ طریقت	۵۲
۱۵۱	متعدد متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں	۵۳
۱۵۳	تفصیلات کی ترقیم	۵۴
۱۵۴	چھوٹی تصحیحات کا محسوس ہونا	۵۵
۱۵۶	اوسط قیمت کا مسئلہ - نتائج	۵۶
۱۶۰	متعدد متغیروں والے تفاعل کا پورا تغیر	۵۷
۱۶۳	چھوٹی تصحیحات میں استعمال	۵۸
۱۶۵	تفاعلوں کے تفاعل کا تفرق اور تصنیفی تفاعلوں کا تفرق	۵۹
۱۶۶	مشق تفاعل کے ہندسی استعمال - کارڈینری محدود	۶۰
۱۶۹	ایک متبادل کی رقوم میں محدود -	۶۱
۱۷۰	متغی کے کسی نقطہ پر کے محاس اور عماد کی مساواتیں	۶۲
۱۷۳	قطبی محدود	۶۳
۱۷۷	امثلہ نمبری ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰	
<h2>پانچواں باب</h2> <h3>اعلیٰ ترتیب کے مشتقات</h3>		
۱۹۵	تعریف - ترقیم	۶۴
۱۹۸	حاصل ضرب کے متواتر مشتقات - فیب نیز کا مسئلہ	۶۵
۲۰۰	حرکیات کی مثالیں	۶۶
۲۰۲	تقریر اور تحدید - تفاعل انعطاف	۶۷
۲۰۵	اقل اور اعظم قیمتوں میں مشق کا استعمال	۶۸
۲۰۶	مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات	۶۹
۲۰۷	دوسرے مشتق کی ہندسی تعبیر	۷۰
۲۱۲	اجزائے متناسب کا نظریہ	۷۱
۲۱۴	امثلہ نمبری ۲۱، ۲۲	

# پہلا باب

## تسلسل

۱۔ **سلسل تغیر** احصا کے ہر مسئلہ میں ہمیں مقداروں کی ایک نہ ایک تعداد سے واسطہ پڑتا ہے، ان میں سے بعض مستقل ہو سکتی ہیں اور باقی متغیر سمجھی جاتی ہیں اور (مزید بریں) تسلسل تغیر کو قبول کرتی ہیں۔

مثلاً ہندسہ کے مسئلوں میں زیر بحث مقداریں طول، نزاوے، رقبے، حجم وغیرہ ہو سکتی ہیں۔ حرکیات میں یہ مقداریں کمیتیں، اوقات، رفتاریں، قوتیں وغیرہ ہو سکتی ہیں۔

جبر و مقابلہ کے ذریعہ اس قسم کی کسی مقدار کو ایک حرف سے تعبیر کرتے ہیں مثلاً  $x$  یا  $y$  لا جس سے وہ نسبت مفہوم ہوتی ہے جو اس مقدار کو اسی قسم کی ایک معیاری یا اکائی مقدار سے ہے۔ یہ نسبت ایک صحیح عدد ہو سکتی ہے یا ایک کسر یا ایک عدد متباہن جس سے مراد یہ ہے کہ ایسے عدد کو کسی ایسی کسر سے تعبیر نہیں کر سکتے جس کا شمار کنندہ و نسب نما وہ نول محدود صحیح اعداد ہوں۔ تاہم ایسی متباہن مقدار کے لئے جو حرف استعمال کیا جائے اس پر جبر و مقابلہ کے تمام معمولی قوانین جاری ہو سکتے ہیں۔

مستقل مقدار کسی دئے ہوئے عمل میں وہ مقدار ہوتی ہے جو اپنی قیمت

نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار جو کسی دے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہے تغیر کہلاتی ہے۔ حروف ابجد کے ابتدائی حروف 'ا'، 'ب'، 'ج' ... کو ہم عام طور پر مستقل مقدار کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف 'ح'، 'ط'، 'ظ'، 'ا'، 'نا'، 'ہی' کو تغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کریں گے۔

بعض مقداریں اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں مثلاً طول، کمیت، کثافت وغیرہ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہیں مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار کی مطلق قیمت سے بلا لحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو ہم دو چھوٹے متضابی خطوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

||ا|| جب لا | لوک ||ا||

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر 'ا' اور 'ب' ہم علامت ہوں تو

$$|ا| + |ب| = |ا| + |ب|$$

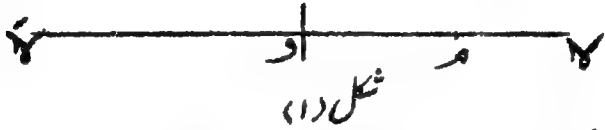
لیکن جب وہ مختلف علامت ہوں تو

$$|ا| + |ب| > |ا| + |ب|$$

صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً منحنیوں کے تماس، کھینچنا، منحنیوں کے طول اور رقبہ معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھ کر ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کر لیا جائے اور ساتھ ہی ساتھ ان جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں واضح یا مضمّن طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقدار کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک استناہی خط مستقیم لا لا لو اس میں ایک ثابت میدان و محور کو درجہ

مختلف مقادروں کے تناسب کسی مناسب پیمانہ پر طول و عرض پر علامت  
بمقادیر (مثلاً کیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب  
پر لینا چاہئے لیکن ایسی صورتوں میں جہاں مقادیر کی علامتیں مختلف ہوں و م  
کو و کے سیدھے یا بائیں جانب کھینچنا چاہئے ہو جب اس کے کہ تعبیر کچانے والی  
مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں لا لا  
میں ایک خاص نقطہ مر لیگا۔



جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر کو قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارا  
یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ م خط لا لا میں ایک خاص وسعت (جو دیکھا جاسکتی ہے)  
کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔  
یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں  
کو اصول موضوعہ کے طور پر بیان لیا ہے یعنی اس قسم کی ہر ممکن مقدار خط لا لا  
کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور (برعکس اس کے) ایک خاص وسعت  
کے اندر خط پر کا ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقدار کی ان  
تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے  
مستقل ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ تمام  
مقداریں بلحاظ اپنی تخصیص کے بالترتیب یا باواسطہ عقلی مقدار کے تعلق رکھتی  
ہیں۔ مثلاً رقبہ ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک  
دئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رقبہ اس طول سے تعبیر ہو سکتی  
ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علیٰ ہذا القیاس۔  
۲۔ تو اس کی علوی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا انتہائی قیمت کا متخیل مختلف  
صورتوں میں احصاء کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت  
رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم







ن کو کافی بڑائی سے اس کو ۱ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔  
مثال ۲۔ اگر لا ایک مثبت مقدار ایک سے کم ہو تو متغیر

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots (5)$$

ایک نزولی تو اتر جاتی ہیں جس کی سفلی انتہا صفر ہے۔ کیونکہ  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ایک سے بڑا ہے اسلئے  
ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{n}$$

جہاں ما مثبت ہے۔ تب مسئلہ ثانی سے

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(n)} = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n + \dots + \frac{1}{n} + 1$$

پس

$$\frac{1}{n} < 1 + n$$

اور اس لئے ن کو کافی بڑائی سے اسے اتنا بڑا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس ما  
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا انتہا صفر لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔  
مثال ۳۔ ایسے تو اتر پر غور کرو جس میں

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \dots (6)$$

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \dots (7)$$

اس لئے

لا سے بڑا ہوگا اگر لا  $1 + \frac{1}{n}$  سے بڑا ہے لیکن لا صفر  
لا سے بڑا ہے۔ اس لئے تو اتر صعودی ہے۔ پھر



مذکورہ بالا مسئلہ احصا کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے۔ لامتناہی سلسلوں کے نظریہ سے جنکی تمام قسمیں ہم علامت ہوں انکی اچھی توضیح ہوتی ہے۔ درحقیقت لامتناہی سلسلے کی ارقام کا مجموعہ بے معنی چیز ہے کیونکہ جن اعمال پر مشتمل ہے وہ کبھی پورے نہیں ہو سکتے۔ لیکن ایک خاص شرط کے تحت ایک مخصوص مقدار کی تعریف ایک سلسلے سے ہو سکتی ہے۔

سلسلہ  
(۱)  $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$

پر غور کرو جس کی تمام ارقام مثبت ہیں اور فرض کرو کہ

س =  $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$ ، س' =  $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$  (۲)

ان مقداروں کو ہم "جزوی مجموعے" کہیں گے۔ اگر تو اترا

س، س'، س''، .....، س'ن، ..... (۳)

کی علوی انتہا س' ہو تو سلسلہ (۱) کو "مستحق" کہتے ہیں۔ اور مقدار س' کو عام طور پر اس سلسلہ کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔

پھر اگر (۱) مثبت ارقام کا ایک ایسا سلسلہ ہو جس کا مستحق ہونا معلوم ہے اور اگر

$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$  (۴)

مثبت ارقام کا ایک دوسرا سلسلہ ہو جس کی ارقام سلسلہ (۱) کی متناظر ارقام سے

چھوٹی ہیں یعنی  $ع_n > ع'_n$  کی تمام قسمیوں کے لئے تو (۴) بھی مستحق

ہوگا۔ کیونکہ اگر س'ن، (۴) کی پہلی n رقموں کا مجموعہ ہو تو س'ن > س'ن

اور بوجہ فرض چونکہ مقادیر س'ن کی علوی انتہا ہے اس لئے مقادیر س'ن

کی بھی ایک علوی انتہا ہوگی۔

مثال سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

مجموعہ ۲ کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر شکل ۲ (صفحہ ۴) میں ہم  $1 = 1$  اور  $2 = 2$  لیں اور ہم  $(1)$  کو  $1$  پر  $1$  اور  $2$  کو  $2$  پر  $1$  اور علیٰ هذا القیاس تعصیف کریں تو نقاط  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000$

مثال ۲۔ سلسلہ

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

پر غور کرو۔ اگر اس کو شکل

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

میں لکھا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

جس کی علوی انتہا ۱ ہے۔

مثال ۳۔ مزید مثالیں ہر ایسے حسابی عمل سے حاصل ہو سکتی ہیں جس میں نہ ختم ہونے والے اعشاریہ کے ہند سے متواتر حاصل ہوتے جاتے ہیں۔ مثلاً ۲ کا جذر المربع نکالنے کے معمولی عمل سے سلسلہ

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$



سلسلہ کے ارکان مقدار کے لحاظ سے ترتیب دئے گئے ہیں یا یہ کہ وہ تمام انتہائی قیمت سے بڑے یا چھوٹے ہیں۔  
مفروضہ یہ ہے کہ ن کی ایک قیمت معلوم کیا جاسکتی ہے اس طرح پرکہ لائی کے بعد آنے والے سلسلہ کے ارکان یقینی

$$ل_{1+n} \quad ل_{2+n} \quad ل_{3+n} \quad \dots$$

سب کے سب قیمتوں میں۔ صہ اور صہ + صہ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ ن کی یہ قیمت جس کی بنا پر شرط مذکورہ بالا کا پورا ہونا ضروری ہے بری ہوگی جتنا صہ چھوٹا ہوگا لیکن یہ مفہوم اس مفروضہ کے اندر شامل ہے کہ خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا یا جائے اس طرح کی قیمت کا وجود ہوگا۔  
مثال ۱۔ تواتر

$$(۳) \quad \dots \quad \frac{1}{n} + 1 \quad \frac{1}{n} - 1 \quad \dots \quad \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

میں انتہائی قیمت صہ ۱ ہے۔  
مثال ۲۔ تواتر

$$(۴) \quad \dots \quad \frac{جب ۱}{ن} \quad \dots \quad \frac{جب ۲}{۳} \quad \dots \quad \frac{جب ۲}{۲} \quad \dots \quad \frac{جب ۱}{۲}$$

میں شمار کنندہ ہمیشہ ۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور نسب کا لانا انتہائی ہوتا ہے اسلئے سلسلہ میں انتہائی قیمت صہ ہے۔

بعض صورتوں میں یہ دیکھنا ممکن ہے جیسا اوپر کی مثالوں میں کہ ایک دئے ہوئے تواتر کی ایک معلوم مقدار انتہائی ہے اور اس لئے تواتر متدق ہے۔ لیکن حل طلب سوال عام طور پر مقدار آسان نہیں ہوتا اور اس لئے ایک ایسی جانچ یا پرکھ کی ضرورت پڑتی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ دئے ہوئے تواتر کی انتہائی قیمت ہے یا نہیں۔ درحقیقت بہت سی مقداریں ریاضی میں ایسی ہیں جن کا تعین محض انتہائی صورت میں ہو سکتا ہے اسلئے ہم کو ایسی صورت میں اس لامر کا اطمینان ضروری ہے کہ انتہا موجود ہے۔

سب سے پہلے یہ واضح ہے کہ اگر تو (۱) کی انتہا ہے تو ن کی ایک قیمت ہمیشہ معلوم کیا جاسکتی ہے اس طرح کہ سلسلہ کے ارکان جو لان کے بعد آتے ہیں یعنی

$$\text{لان} + ۱, \text{لان} + ۲, \text{لان} + ۳, \dots, \text{لان} + ۱۰$$

رکتے ہیں جو صہ سے تجاوز نہیں ہوتا جہاں صہ کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ برعکس اس کے آگے شرط پوری ہو تو سلسلہ کی ایک معین انتہا ہوتی ہے۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے پہلے ہم ایک ایسا نزولی تو از بناتے ہیں جو مثبت مقدار پر صہ، صہ، صہ، ..... پر مشتمل ہے اور جس کی انتہا صہ ہے۔ اس قسم کا تو از بنایا جاسکتا ہے مثلاً ہر رکن کو اپنے پہلے رکن کا نصف لینے سے۔ یہ موجب فرض ایک عدد معلوم کیا جاسکتا ہے اگر سلسلہ کے تمام ارکان جو لان کے بعد آتے ہیں قیمتوں

$$عہ = لان - صہ \text{ اور } بہ = لان + صہ$$

کے درمیان واقع ہوتے ہیں اس طرح ایک عدد م ( $< لان$ ) معلوم کیا جاسکتا ہے ایسا کہ تمام ارکان جو لان کے بعد آتے ہیں عہ = لان - صہ اور

$$بہ = لان + صہ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ پس لان کے بعد آئیں گے$$

تمام ارکان ایک خاص وقفہ میں واقع ہوتے ہیں جس کی وسعت (فرض کرو) عہ سے بہ تک ہے اور یہ عہ سے بہ واسطے وقفہ کے اندر شامل ہے اور اس طرح کا ہے کہ

$$بہ - عہ > ۲ صہ$$

اور علیٰ ہذا القیاس - مقادیر عہ، عہ، عہ، ..... ایک صعودی تو از

بناتی ہیں اور چونکہ وہ تمام بہ سے کم ہیں اس لئے ان کی ایک علوی انتہا (فرض کرو)

۴۴۔ اسی طرح متادیر  $b, b, b, b$ ، ایک زدلی تواتر بناتی ہیں جنکی سفلی انتہا نہ ہے۔ نیز چونکہ

نہ۔ ۴۴ > بی۔ ۴۴ > ۲ صبی

جو اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس لئے انتہائیں ۴۴ اور نہ مختلف نہیں ہون سکتیں۔ متذکرہ بالا شرط کے ماتحت ۴۴ اور نہ کی مشترک قیمت تواتر (۱) کی انتہا ہے۔

مثال ۳۔ کسی حسابی عمل سے ایسی مثال مل سکتی ہے جس میں ایک نتیجہ تواتر تقریباً کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے جبکہ تقریبات حسب معمول طریقہ سے مرتب کئے جائیں یعنی آخری نمایاں ہندسہ میں اکالی کا اضافہ کر دیا جائے جب کبھی اس کے بعد انیوالا ہندسہ ۵ یا ۵ سے زیادہ ہو۔ مثلاً ۶ کا جذر المربع معلوم کرنے کے عمل سے

۲۵۶۴۵۵۱۳.....

حاصل ہوتا ہے۔ تواتر تقریب جو طریقہ متذکرہ بالا کے موافق مرتب کئے گئے ہیں

۲، ۲۵۶، ۲۵۶۴، ۲۵۶۴۵، ۲۵۶۴۵۸، ۲۵۶۴۵۵، ۲۵۶۴۵۵۱.....

۵ میں جن سے زیر بحث قسم کا ایک تواتر حاصل ہوتا ہے۔ جو عدد پہلے عدد کے بعد آتے ہیں اس جذر سے ۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ دوسرے عدد کے بعد آنے والے اعداد اس سے ۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ تیسرے عدد کے بعد آنے والے اس سے ۵ سے کم فرق رکھتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے تواتر کی ایک خاص انتہا ہے۔

مثال ۴۔ ایسے سلسلہ پر غور کرو جس میں

$$(۱) = 1, (۲) = \frac{1}{1+1}, (۳) = \frac{1}{1+1+1}, \dots$$

تمام ارکان مثبت ہیں اور (پہلے رکن کے بعد) ہر رکن سے کم ہیں۔ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ارکان دو سرے رکن کے بعد  $\frac{1}{n}$  سے بڑے ہیں۔ پھر





نکل میں ترسیم کا ضروری حصہ دکھایا گیا ہے۔  
 اس مثال میں اور دفعہ (۲) کی مثال (۳) میں تقرب کے ایسے طریقہ کی ہم نے سادہ  
 مثالیں دی ہیں جو دو شخصوں کے تقاطع سے متعلق ہیں۔ یہ طریقہ اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔  
 استدقاق بطی ہوگا اگر شخصوں کے میلان محور لا کے ساتھ (ایک ہی یا مخالف سمتوں  
 میں) تقریباً دی ہوں۔

## ۵۔ لا متناہی سلسلوں میں استعمال۔

اگر لا متناہی سلسلہ

۱ + ۲ + ۳ + ..... + n + ..... (۱)  
 میں جسکی ازقام کا ہم علامت ہونا مشروط نہیں ہے ہم

$$س_۱ = ۱، س_۲ = ۱ + ۲، .....، س_n = ۱ + ۲ + ۳ + ..... + n$$

(۲) .....

رکھیں اور اگر تو اتر

س\_۱، س\_۲، س\_۳، .....، س\_n ..... (۳)

کی انتہائی قیمت لیں ہو تو سلسلہ کو 'ستق' کہا جاتا ہے اور لیں  
 کو اس کا مجموعہ کہتے ہیں۔

دفعہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱) کے استدقاق کے لئے ضروری اور  
 کافی شرط یہ ہے کہ ایک عدد n کا معلوم کرنا ممکن ہو اس طرح کہ جزوی

مجموعے لیں ۱ + ۲ + ۳ + ..... + n + پ ..... تمام لیں

سے استقدر فرق رکھیں جو صہ سے کم ہو جہاں صہ کوئی اختیار ہی مقدار  
 ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔

موجودہ بحث سے متعلق ایک اہم سلسلہ یہ ہے کہ اگر سلسلہ



اگر ایک سلسلہ کی ارقام باری باری سے مثبت اور منفی ہوں اور ملحوظ مطلق قیمت کے مسلسل گھٹتی جائیں اور معہذا آخر کار صفر انتہائی طرف مائل ہوں تو سلسلہ مستقیم ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ ارقام کی کسی محدود طاق تعداد کے مجموعہ اور کسی محدود جفت تعداد کے مجموعے کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ہر صورت میں ارقام کی تعداد ابتدا سے شمار کی جائے۔

طالب علم اس کے ثبوت سے واقف ہوگا لیکن چونکہ یہ پچھلی دفعہ کے استدلال کی ایک عمدہ مثال ہے اسکو یہاں دہرایا جاتا ہے۔  
فرض کرو کہ سلسلہ

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + \dots (7)$$

ہے جس میں بموجب فرض

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < \dots$$

شکل میں فرض کرو کہ

$$1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 = 10 = \dots$$



(شکل ۵)

یہ ظاہر ہے کہ نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ... ایک نزولی توازن بناتے ہیں اور نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ... ایک صعودی توازن۔ نیز پہلے سلسلہ کا ہر نقطہ دوسرے سلسلہ کے ہر نقطہ کے دائیں جانب ہے پس ہر توازن کا ایک انتہائی نقطہ موجود ہوتا ہے اور چونکہ

$$1 + 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 = 10 = \dots$$

اور اس لئے آخر کا کسی اختیاری مقدار سے کم ہے، یہ دونوں انتہائی نقطے آخر کار ایک نقطہ (فرض کرو) منطبق ہونے چاہئیں تب وہ دئے ہوئے سلسلہ (۶) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال - سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

۱ اور ۱- کے درمیان ایک انتہائی طرف مستقر ہوتا ہے۔  
یہ سلسلہ اتفاقاً مستقر جماعت سے متعلق ہے۔ آئندہ یہ بتلایا جائیگا (صفحہ ۱۰۵)  
کہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

ن کو کافی بڑھنے سے اس قدر بڑا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔  
یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ لامتناہی سلسلوں سے متعلق جو نقطہ مجموعہ  
ہم نے استعمال کیا ہے وہ بالکل وضعی حیثیت رکھتا ہے اور یہ کہ ہم اس معاملہ میں  
آزاد نہیں ہیں کہ بغیر جانچ کے اس طرح کے سلسلہ کو اس طور پر استعمال کریں  
جیسے ایک جملہ کو استعمال کیا جاتا ہے جو ارقام کی محدود تعداد پر مشتمل ہو۔  
مثلاً ہمیں یہ پس مان لینا چاہئے کہ رقموں کی ترتیب کو بدل دینے سے مجموعہ  
نہیں بدلتا مطلقاً مستقر سلسلہ کی صورت میں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ مفروضہ  
جائز ہے لیکن اتفاقاً مستقر سلسلہ میں ارقام کی ترتیب کو بدلا کر ان کو کسی دوسرے  
مناسب ترتیب میں رکھنے سے سلسلہ کو ہم انتہائی طرف مستقر کرنا چاہیں کر سکتے ہیں  
ان سلسلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کتابوں میں مل سکتے ہیں۔ اس کتاب میں  
لکھنے کی چنداں ضرورت نہیں۔  
بہر کیف حسب ذیل سادہ مسائل کا اکثر حوالہ دیا جائیگا۔

۱۔ اگر  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$  (۷)

ایک مستقر سلسلہ ہو جس کا مجموعہ (۷) ہے تو سلسلہ

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$  (۸)

جو (۷) کی ارقام کو جزو ضربی ۱ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

مجموعہ (دس) کی طرف مستحق ہوگا۔ اس کا ثبوت ظاہر ہے۔

۲۔ اگر  $ع_۱ + ع_۲ + ..... + ع_n + ..... - (۹)$

اور  $ع_۱ + ع_۲ + ..... + ع_n + ..... - (۱۰)$

مستحق سلسلے ہوں جن کے مجموعے علی الترتیب دس اور دس ہیں تو سلسلہ

$(ع_۱ + ع_۲) + (ع_۳ + ع_۴) + ..... + (ع_n + ع_{n+1}) + ..... - (۱۱)$

جو (۹) اور (۱۰) کی متناظر ارقام کے مجموعوں یا فرقوں پر مشتمل ہے مجموعہ

دس  $\pm$  دس کی طرف مستحق ہوگا کیونکہ اگر دس  $\pm$  دس کی علی الترتیب

(۹) اور (۱۰) کی پہلی n رقموں کے مجموعے ہوں تو (۱۱) کی پہلی n رقموں کا

مجموعہ دس  $\pm$  دس ہوگا۔ اب

$(دس \pm دس) - (دس \pm دس) = (دس - دس) \pm (دس - دس)$

..... (۱۲)

بوجب فرض اگر صہ کوئی اختیاری مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو ہم n کی ایک قیمت معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ اس قیمت اور اس سے اعلیٰ قیمتوں کیلئے

$دس - دس > \frac{1}{n} صہ$  اور  $دس - دس > \frac{1}{n} صہ$

..... (۱۳)

اور اسلئے  $دس \pm دس - (دس \pm دس) > \frac{1}{n} صہ$  ..... (۱۴)

جو اس بات کی شرط ہے کہ دس  $\pm$  دس کی انتہائی قیمت دس  $\pm$  دس ہو جائے۔

۳۔ اسی مندرجہ سے سلسلہ

$(ع_۱ + ع_۲) + (ع_۳ + ع_۴) + ..... + (ع_n + ع_{n+1}) + ..... - (۱۵)$

مجموعہ + ب دس کی طرف مستقر ہوگا۔ پچھلے دو مسئلوں سے یہ فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

#### ۴۔ تفاعل کی عام تعریف۔

ایک متغیر مقدار کو دوسری متغیر مقدار کا تفاعل کہتے ہیں جبکہ دوسری چیزیں وہی برقرار رہیں اور مداخلت نہ کر متغیر کی قیمت مقرر کر دی جائے تو اول المتغیر کی قیمت معین ہو جائے۔

اس قسم کا ربط رکھنے والی دو مقداروں میں اس طرح تیسری کی جاتی ہے کہ ان کو علی الترتیب ذابج متغیر اور متغیر متبوع کہتے ہیں۔

ایک متغیر مقدار کے تفاعل کا تصور ریاضیات میں مختلف شاخوں میں ملتا ہوتا ہے۔ مثلاً علم الحساب میں ان اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد کا ایک تفاعل ہے گولیوں کے ایک مثلثی یا ایک مربع اجزاء میں گولیوں کی تعداد گولیوں کی اس تعداد کا تفاعل ہے جو قاعدے کے ہر ضلع میں ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے سلسلہ کی پہلی n رقموں کا مجموعہ (میان) عدد n کا تفاعل ہے۔ علی بن النقیاس۔ اس قسم کی بعض صورتوں میں ریاضی تفاعلوں کے لئے ریاضی کے خاص ناموں ضابطے ہوتے ہیں لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ تفاعل کے منشاء میں ان کا وجود ضروری نہیں ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

کی پہلی n رقموں کا مجموعہ n کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس مجموعہ کو ظاہر کرنے کے لئے ریاضی میں کوئی ٹھیک جملہ موجود نہیں ہے۔ اسی طرح اول متغیر کی تعداد جو ایک دئے ہوئے صحیح عدد n سے تجاوز نہیں کرتے n کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس کو ایک ضابطہ سے تعبیر نہیں کیا جاسکتا۔

ان مثالوں میں متغیر متبوع لپٹانا اپنی نوعیت کے صرف محدود طور پر تبدیل ہو سکتا ہے صفاری احصا میں خصوصاً ایسی صورتوں پر بحث ہوتی ہے جن میں متغیر متبوع دفعتاً

معنوں میں سلسل ہو۔ مثلاً ہندسہ میں ایک دائرہ کا رقبہ یا ایک کرہ کا حجم نصف قطر کا ایک تفاعل ہوتا ہے نظری طبیعیات میں ایک گرنے والے ذرہ کا ارتقاع یا رفتار وقت کا ایک تفاعل سمجھی جاتی ہے۔ ایک دوسرے ذرے سے ارتقاع کا اور سرعت کا ایک تفاعل دئے ہوئے ہیں یہ ایک دی ہوئی تیس کا دواؤ نہ انت کا ایک تفاعل یہ شدہ بھاپ کا دواؤ تیش کا ایک تفاعل وغیرہ منظور ہوتے ہیں یہاں پر بھی تفاعل کے لئے ریاضی کے ایک یا دو جدید یا غیر وجود کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ دو متغیروں کے درمیان تفاعلی ربط قائم کر نیئے لئے صرف یہ ضروری ہے کہ ایک کی قیمت سے دوسرے کی قیمت کا تئیں ہو جائے بشرطیکہ دوسری چیزیں غیر متغیر رہیں۔

عام طور پر ہم متغیر متبوع کو (۱) کے اور تابع متغیر کو (۲) سے تعبیر کرینگے۔ ان دونوں کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکو اکثر

ما = ف (لا) یا ما = ف (لا) وغیرہ سے ظاہر کیا جائیگا۔ مرف (لا) (۱) سے مراد 'لا کا کوئی خاص تفاعل' ہے۔

۱۴ ہر ایک مقدار ایک قیمت سے دوسری قیمت اختیار کرتی ہے تو یہ نئی قیمت پہلی قیمت سے جیسفدہ بڑی ہوتی ہے اسکو اس مقدار کا 'اضافہ' کہتے ہیں خواہ یہ مثبت ہو یا منفی۔ اس اضافہ کو ہم اس طرح ظاہر کریں گے کہ متغیر مقدار کے پہلے صف 'جو محمد و در فرق' کا اختصار خیال کیا جاسکتا ہے لکھ دیا جائیگا 'اگر نرمی میں اس علامت لے لے کا یا ہے [صف = ۵]۔

مثلاً ہم کہتے ہیں کہ متغیر متبوع لا سے بدلکر لا + صف لا ہو جاتا ہے اور ۲۱ جہت تابع متغیر ما سے بدلکر ما + صف ما ہو جاتا ہے۔

پس اگر ما = ف (لا) ..... (۱)  
تو ما + صف ما = ف (لا + صف لا) ..... (۲)  
اس لئے صف ما = ف (لا + صف لا) - ف (لا) ..... (۳)  
فی الحال اس ترتیم میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ صف لا یا صف ما چھوٹا ہے۔ ربط (۲) پورا ہونے پر اضافوں کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں۔



مثال (۱)۔ اگر ما = لا تو جب 'لا' = ۱۰۰، 'مف' لا = ۱ تو

$$\text{مف ما} = (۱۰۱) - (۱۰۰) = ۳۰۳۰۱$$

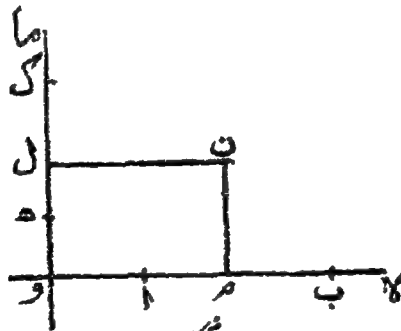
مثال (۲)۔ اگر ما = جب لا تو اگر 'لا' = ۴۰، 'مف' لا = ۱ تو

$$\text{مف ما} = ۱۸۷۲۲ - ۱۸۶۹۰۳ = ۵۰۰۸۵۹$$

ایک۔ خاص درجہ صحت، تک۔

### ۷۔ تفاطلوں کی ہندی تعبیر۔

تعبیروں 'لا'، 'ما' کے درمیان جو ربط ہے اب ہم اسکی ہندی تعبیر  
 علی القوائم محاورہ 'ولا' و 'ما' لیکر معلوم کرتے ہیں۔ 'ولا' میں طوں  
 و 'ما' میں حرح کہ وہ متغیر متبوع 'لا' کی کسی خاص قیمت کو تعبیر کرے  
 اور 'ما' میں 'ول' جو تفاطل 'ما' کی متناظر قیمت کو تعبیر کرے اور  
 سبیل و 'من' ل کی تکمیل کر دو نقطہ ن کا مقام



شکل (۶)

دو مربوط متغیروں کی قیمتوں کو ظاہر کریگا۔

اب چونکہ نقطہ م بموجب فرض 'ولا' پر کوئی مقام اختیار کر سکتا ہے جو  
 (مکن ہے کہ) دو ثابت سروں کے درمیان ہو ہمیں اس طرح نقاط ن کا  
 ایک لامتناہی گروہ حاصل ہوتا ہے۔

اس گروہ کی نوعیت سے متعلق اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے۔ کیا اس

گروہ کے نقاط ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں۔ اکثر صورتوں میں اسکا جواب ظاہر ہے۔ مثلاً ایک دائرہ کے رقبہ اور اس کے نصف قطر کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکی اگر ہندی تعبیر معلوم کرنا ہو تو ہم وہ رقبہ نصف قطر کے متناسب اور ن ہر کو رقبہ کے متناسب لیتے ہیں۔ اس طرح ن ہر و ہر اور نقاط ایک مکافی پر واقع ہوتے ہیں۔ یہی منحنی اس ربط کو بھی تعبیر کر گیا جو ایک گرنے والے جسم کے طے شدہ فاصلہ (ف) اور وقت (ت) کے درمیان ہے کیونکہ ف ایسے بدلتا ہے جیسے ت۔

لیکن عام صورت میں ہمارا جواب ہندی میں ہونا چاہئے۔ دفعہ (۶) کی ابتدا میں تفاعل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کا ضروری مفہوم یہ ہے کہ لا کی قیمت کے جواب میں ما کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ما کی قیمتیں ہیں ان میں کسی ربط کا وجود ہونا ضروری نہیں ہے خواہ لا کی یہ مختلف قیمتیں ایک دوسرے سے کتنی ہی قریب واقع ہوں۔

تفاعل کی جس تعریف کا حوالہ دیا گیا ہے وہ حقیقت ہمارے موجودہ تقاضا کا لحاظ کرتے ہوئے بہت زیادہ وسیع ہے۔ عام طور پر احصا میں ایسے تفاعلوں سے سابقہ پڑے گا جو چند خاص اہم قیود کی پابندی کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلی قید یہ ہے جو شکل کے نام سے موسوم ہے۔ اس کا مقصد یہ ہے کہ جس طرح نقطہ ہر خط و کلا کے کسی محدود حصہ پر چلتا ہے، اسی طرح خط و ما کے ایک محدود حصہ ہر گ پر چلتا ہے یعنی ل کم سے کم ایک مرتبہ ہر اور گ کے درمیان ہر مقام کو اختیار کرتا ہے۔ مزید بریں اگر وسعت ارب کو مسلسل گھٹا دیا جائے تو وسعت ہر گ بھی گھٹتی ہے اور ارب کو کافی چھوٹا لینے سے اس قدر چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جس قدر ہم چاہیں۔

ابھی تک یہ دو پیمائشیں (دفعہ ۶) کہ اس دوسری خاصیت میں پہلی خاصیت شامل ہے۔ اب ہم مسلسل تفاعل کی باضابطہ تعریف دینگے جو اگرچہ

کسی قدر مختلف ہے لیکن مندرجہ بالا کے مثال ہے۔

## ۸۔ مسلسل تفاعل کی تعریف۔

فرض کرو کہ متغیر متبوع اور تفاعل کی کوئی دو متناظر قیمتیں 'لا' 'ما' ہیں۔ اگر متغیر متبوع کی قابل قبول قیمتوں کا کوئی اختیاری تواتر 'لا' 'لا' 'لا' 'لا' ..... 'لا' ..... لیا جائے جس کی انتہا 'لا' ہے اور ان قیمتوں کے جواب میں تفاعل کی قیمتوں کا تواتر 'ما' 'ما' 'ما' ..... 'ما' ..... حاصل ہو جو انتہا 'ما' کی طرف ہمیشہ متدیق ہوتا ہے تو متغیر متبوع کی اس خاص قیمت 'لا' کے لئے تفاعل کو 'مسلسل' کہتے ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مف 'لا' 'لا' کے اضافہ کو تعبیر کرے اور مف 'ما' 'ما' کے متناظر اضافہ کو خارج کرے تو ہم ہمیشہ ایک مثبت مقدار صبر (جو صفر نہیں ہے) معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ مف 'لا' کی تمام قابل قبول قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں صبر سے کم ہوں، مف 'ما' کی قیمت مطلق قیمت میں شما سے کم ہوگی جہاں شما کوئی مقررہ مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اسے باضابطہ تعریف خیال کیا جاسکتا ہے اس تعریف میں جو شرط شامل ہے اگر وہ پوری نہ ہو تو قبل الذکر تعریف کی شرط بھی پوری نہیں ہو سکتی اس طرح یہ دونوں تعریفیں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ اس دوسری تعریف کو اجالا ٹیکنیک غیر مکمل صورت میں بھی اس طرح ہی بیان کرتے ہیں کہ متغیر متبوع میں ایک الاستناہی چھوٹی تبدیلی تفاعل میں ایک الاستناہی چھوٹی تبدیلی پیدا کر دیتی ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اگر ف (لا) کوئی

\* مف 'لا' کی قابل قبول قیمتوں کی قید کے یہ معنی ہیں کہ 'لا' مف 'لا' متغیر متبوع کی قیمتوں کی اس وسعت کے اندر واقع ہونا چاہئے جسکی تفاعل اجازت دیتا ہے۔

تفاعل ہو تو ایک مقدار صہرہ کا مستعمل کرنا ممکن ہونا چاہئے اس طرح کہ

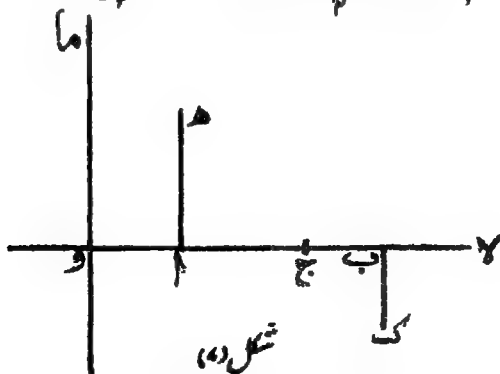
الف (لا+هـ) - ف (لا) > ش

۷۷ کی تمام جائز قیمتوں کے لئے اس طرح کہ | ۱۵ | > ۱۶ | صہ | صہ کی قیمت عام طور پر شہر کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے لیکن اس تعریف میں یہ مفہوم مضمر ہے کہ صہ کی کسی خاص قیمت سے شرط بالا ہمیشہ پوری ہو سکتی ہے خواہ شہر کتنا ہی چھوٹا ہو۔

۹۔ مسائل تفاعل کی خاصیت۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = و سے لا = ب تک مسلسل  
 ہے اور اگر ف (ا) (ب) مختلف العlastت میں تو و اور ب کے  
 درمیان لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ف (لا) = -  
 شکل ذیل میں صراحت کی خاطر یہ مان لیا گیا ہے کہ ف (ا) مثبت اور  
 ف (ب) منفی ہے۔ خط لا لا کے وہ نقطے جہاں لا = و لا = ب  
 علی الترتیب ا ب کے تعبیر کئے گئے ہیں اور تفاعل کی متناظر قیمتیں  
 ا ب کے تعبیر ہوتی ہیں۔ ثبوت اس بات پر مشتمل ہے کہ طول میں  
 گھٹنے والے و نفوں کا سلسلہ

..... $\frac{1}{4}$ ab..... $\frac{1}{8}$ ab..... $\frac{1}{16}$ ab.....



۱۶ معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ہر وقفہ اپنے سے پہلے وقفہ کا ایک حصہ ہو اور ہر ایک ایسے نقاط پر مشتمل ہو جن پر ف (لا) مثبت اور نیز ایسے نقاط پر جن پر ف (لا) منفی ہوتا ہو۔

فرض کر کہ اربع کی تضعیف ہر پر ہوتی ہے۔ اگر ہر پر ف (لا) = ۰۔ تو اس خاص صورت کے لئے مسئلہ بالادست ہو جاتا ہے۔ اس لئے ہم اس کو اور اسکی مماثل صورتوں کو اپنے ثبوت سے خارج کر دیتے ہیں۔ اگر ف (لا) نقطہ ہر پر صفر نہیں ہوتا تو اربع ہر ب وقفوں میں سے کم سے کم ایک وقفہ میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونو ہوں گیں۔ اگر صرف ایک وقفہ میں یہ بات پائی جائے تو ہم اس کو منتخب کر لیتے ہیں اور اگر دونوں تو انتخاب خیرا کی ہے۔ منتخب شدہ وقفہ کو پھر ہر پر تضعیف کیا جاتا ہے۔ اس صورت کو خاص کر کے چاہیں ہر پر ف (لا) صفر ہو جاتا ہے ان دونوں حصوں میں کم سے کم ایک حصہ ایسا ضرور ہو گا جس میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونو ہوں گیں اس عمل کو لامتناہی طور پر جاری رکھا جاسکتا ہے اور چونکہ

$$۱۰۰ = \frac{۱}{۱۰۰} \text{ (ب)}$$

وقفہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تقسیم کرنے والے نقاط کے تواتر

میں جو اس طرح کے عمل سے حاصل ہوتا ہے ایک خاص انتہائی مقام ج (فرض کرو) ہونا چاہئے۔

مزید بریں ج پر ف (لا) کی قیمت صفر ہونی چاہئے۔ کیونکہ اگر یہ قیمت مثبت ہو تو ج کے دونو طرف ایک محدود وسعت ایسی ہونی چاہیے جس میں ف (لا) مثبت ہو گا اور یہ اس وجہ سے کہ ف (لا) کو مسلسل تسلیم کر لیا گیا ہے۔ یہ اس نتیجہ کے بنانی ہے جو ابھی ہم نے ثابت کیا۔ اسی طرح ج پر ف (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔

مسئلہ بالا کو ہم اجمالاً اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک سلسل تفاعل اپنی

علامت تبدیل نہیں کر سکتا جب تک کہ وہ صفر قیمت میں سے نہ گزرے۔  
 اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = لا سے (لا) ب تک سلسل ہے  
 اور اگر ف (لا) ف (ب) غیر سادی ہوں تو لا اور ب کے درمیان لا کی  
 ایک قیمت موجود ہونی چاہئے ایسی کہ ف (لا) = بیا جہاں بیا ف (لا)  
 اور ف (ب) کے درمیان کوئی مقدار ہو سکتی ہے۔ کیونکہ فرض کرو  
 نہ (لا) = ف (لا) - بیا

چونکہ بیا مستقل ہے فہ (لا) بھی ایک سلسل تفاعل ہوگا۔ بموجب فرض  
 ف (لا) - بیا اور ف (ب) - بیا  
 مختلف العلامت ہیں اور اس لئے فہ (لا) اور فہ (ب) مختلف العلامت  
 پس مسئلہ بالا سے لا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی  
 چاہئے جس سے لئے فہ (لا) = بیا یعنی ف (لا) = بیا  
 بالفاظ دیگر ایک سلسل تفاعل ایک قیمت سے دوسری قیمت تک چاہیں سکتا  
 جب تک کہ یہ درمیانی قیمت کو درکم سے کم، ایک مرتبہ اختیار نہ کرے۔

### ۱۰۔ سلسل تفاعل کی ترتیب

جو کچھ کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقاط کا گردہ  
 جو ایک تفاعل کو دفعہ (۱) کے مستند ہیں تعبیر کرتا ہے ایک منسلکہ گردہ پیدا کرتا  
 ہے۔ اس کے معنی ہیں کہ اس گردہ میں سے کوئی ایسا خط نہیں کھینچا جاسکتا  
 جو اس کے کسی نہ کسی ایک نقطہ میں سے نہ گزرے۔ کیونکہ اگر تفاعل کو ف (لا)  
 سے اور کسی خط کے سین کو ف (لا) سے تعبیر کریں اور اگر ف (لا) اور ف (لا)  
 دونوں سلسل ہوں تو فرق

فہ (لا) - فہ (لا)

بھی سلسل ہوگا (دفعہ ۱۲) اور اس لئے یہ علامت بدل نہیں سکتا جب تک کہ صفر  
 قیمت میں سے نہ گزرے۔

اب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم نقاط کے ایک منسلکہ گردہ کا ایک منحنی پر

واقع ہونا فرض کر سکتے ہیں۔ اس کا جواب زیادہ تر اس پر منحصر ہے کہ اصطلاح "مختص" کے ساتھ کیا خاصیتیں لازم قرار دی جاتی ہیں۔ بہر کیف یہ تو ظاہر ہے کہ گروہ سے متعلق کافی تفصیل معلوم کر کے ان کو علی طور پر ایک کاغذ پر ترتیب دے کر اور ان میں سے گزرنے والا ایک مسلسل خط کھینچنے سے ہم ایک سلسل تفاعل کے عام طریق یا چال کو ابھی ظاہر کر سکتے ہیں۔ جو شکل اس طرح بنائی جاتی ہے اس کو تفاسیر کی ترتیب کہتے ہیں۔

ذیل کے تفاسیر کی ترتیب سے طالب علم بخوبی واقف ہو گا یہ سادہ اور دو درجی سادہ اور تین درجی تفاسیر کی وضوح کے لئے استعمال ہوتی ہیں۔

ع = ا + ب، ا + ب = ج

اس کتاب میں تفاسیر کی ترتیب کی بنا پر استعمال کیا گیا ہے سادہ اور ابتدائی کتابوں میں استعمال کیا جاتا ہے (لیکن یہ بنیادی ضروری ہے کہ تفاسیر ریاضی پر اس کے استعمال کرنے میں خاص خاص قیود کا تین ان رکھنا پڑتا ہے۔ سب سے پہلے یہ ظاہر ہے کہ جدا جدا قیمتوں کی ایک محدود تعداد تفاعل کو پوری طرح تفصیل نہیں کر سکتی۔ اور درحقیقت جب تک کہ ان کی قیمتوں کے انتخاب میں جن کے لئے تفاعل ممکن ہو سکتا ہے اس بات سے احتیاط سے کام لیا جائیگا نتیجہ سے بہت زیادہ غلط فہمی پیدا ہو سکتی ہے۔ مزید بریں سادہ یا نیسل کی لکیر کو جس سے تفاعل کا طریق تغیر ہوتے ہیں (یعنی حالات خیالی ریاضی خط کے) پر ہم عمل نہ کر رہے ہو گا اور یہی حال اس ٹیبل ہے جو محمد لا کو تعبیر کرتی ہے۔ اس ٹیبل میں دونوں کے درمیان جو تفاعل ہے اس کو صحیح طور پر معلوم کر کے ہم اس کے ساتھ ساتھ یہ بھی دیکھیں گے کہ ایک طرف سے زیادہ تفصیلات کا کیا اثر پڑتا ہے۔ اس لئے یہ طریقہ ایسے تفاعلوں کی صورت میں (جہاں وجود ثابت کیا جا سکتا ہے) نہ اتنے افسر سمجھا جاتا ہے جن میں پریمانہ کو بڑا کرنے سے بنی بنی تفصیلات کا انکشاف رونما ہوتا ہے۔ موزلہ

مثلاً: ا + ب = ج (۱) کی تفصیلات مبادی کے پاس۔

قبیل کے تفاعل احصا میں بہت کم استعمال ہوتے ہیں۔  
ترتیبی تعین کا طریقہ اکثر اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ تفاعل کے لئے ریاضی  
شکل کا کوئی پہلہ معلوم نہ ہو سکے اور شاہدہ سے متغیر متغیر اور تابع متغیر کی چند متناظر  
قیمتیں مل سکیں۔ اس صورت میں خطوط کی سوائی کی وجہ سے جس ابہام کا  
انکشاف ہوتا ہے اس کے قابل قدر نہیں رہتا جو اس کے تفاعل اور  
شاہدہ کی صورت میں پیدا ہوتی ہیں۔

بہت کم صورتوں میں بدولوں کا شاہدہ دیا ہو گا۔ اب یہ امر جایا  
پیش کیا کہ اگر اس وقت کے ایک تفاعل کی صورت میں شاہدہ لیا جاتا ہے  
طریقہ الاثر کے تحت کھل کر ترتیب حاصل کی جاتی ہے اس سے درحقیقت انہی  
اتوں کا انکشاف ہوتا ہے جو اس مدد کی جدول سے اخذ ہوتے ہیں۔  
کی متناظر قیمتوں کے درمیان کا ایک سلسلہ مندرج ہوتا ہے لیکن یہ بھی شکل زیادہ  
توضیح دیتا ہے کہ یہ تفاعل کی دو میانی قیمتوں کا تصور پیدا کرنے  
میں مدد دیتی ہے۔

۱۱۔ عندئذ سلسلہ

ترتیبی تعین میں تفاعل کے سابقہ پڑتا ہے وہ عام طور پر سخت  
متغیر ہے۔ اس کے متغیر اور متغیر ہوتے ہیں لیکن بعض امور تو ہمیشہ  
مستحکم رہتے ہیں یا قریباً جاتی۔  
مثلاً یہ کہ متغیر متغیر کی چند خاص قیمتوں کے لئے تفاعل کی  
ابتدائی ترتیب سے متغیر ثابت ہو۔ مثال کے طور پر تفاعل

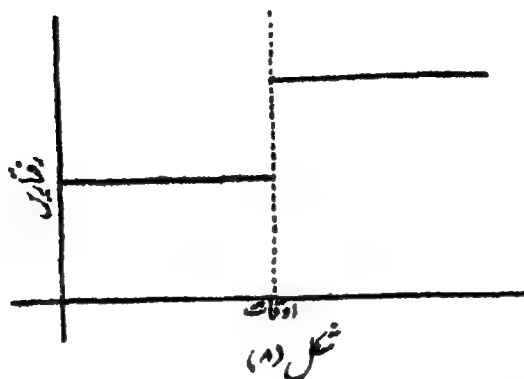
جب لا

تو اس کے علاوہ فلا کی کسی قیمت کے لئے شمار کنندہ اور نسب نامہ کی  
خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور خارج قیمت کا وجود ہوتا ہے۔ لیکن جب لا = ۰  
تو اس کے متغیر شکل کے متغیر اختیار کرتی ہے۔ یہ صحت ہے کہ عام طور پر اس قیمت





پیشتر اور مرن بعد کی رفتاروں کی تعیین ہو سکتی ہے۔



۱۔ امف ع + مف ن ا > ثا

پس تفاعل ع + و سلسل ہے۔  
اب اگر تین سلسل تفاعل ع + و لکھ ہوں تو ع + و سلسل ہے ہر طرح  
کہ ثبوت بالا سے ظاہر ہے اور اس لئے (و + ع) + و سلسل ہے۔ اسی طرح  
اس مسئلہ کو قدم بہ قدم تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی صورت میں وسعت  
دیجا سکتی ہے۔

۲۔ سلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا حاصل ضرب خود ایک سلسل  
تفاعل ہوتا ہے۔

پہلے در تفاعلوں ع + و کی صورت پر غور کرو۔

مف (ع و) = (ع + مف ع) (و + مف و)۔ ع و

= و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

بوجب فرض ہم امف لا ا کو کافی چھوٹا لیکر امف ع اور امف و ا کو کسی  
مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ پس چونکہ ع اور و  
محدود ہیں اور مف ع اور ع مف و اسی مقررہ مقدار سے چھوٹے  
بنائے جاسکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو یہی حال امف ع مف و  
کا ہے۔ اس لئے

۱۔ امف ع + ع مف و + مف ع مف و ا

کی قیمت بھی کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنائی جاسکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی  
چھوٹی ہو۔ یعنی ع و ایک سلسل تفاعل ہے۔

اب فرض کرو کہ تین سلسل تفاعل ع + و لکھیں ہم نے دیکھ لیا کہ ع و  
سلسل ہے اس لئے (ع و) بھی سلسل ہے۔ اور اسی طرح سلسل  
تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی صورت میں بھی یہ درست ہے۔

۳۔ دو سلسل تفاعلوں کا خارج قسمت سلسل تفاعل ہوتا ہے سوائے متغیر  
متبع کی ان قیمتوں کے لئے (اگر کوئی ہو) جن کے لئے مقسوم علیہ صفر ہوتا ہو۔  
فرض کرو کہ تفاعل ع و اور و ہیں تو

$$\text{مف} \left( \frac{ع}{و} \right) = \frac{ع + \text{مف} ع}{و + \text{مف} و} - \frac{ع}{و}$$

$$= \frac{\text{مف} ع - ع \text{مف} و}{(و + \text{مف} و)}$$

بوجب فرض و +۔ اس لئے مقدار و (و + مف و) کی مطلق قیمت کی ایک سبلی  
انتہا مہمونی چاہئے جو صفر نہیں ہو سکتی۔ پس

$$| \text{مف} \left( \frac{ع}{و} \right) | > | \frac{ع}{و} \text{مف} ع - \frac{ع}{و} \text{مف} و |$$

اب چونکہ  $\frac{ع}{و}$  اور  $\frac{ع}{و}$  محدود ہیں ہم مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے

$$| \frac{ع}{و} \text{مف} ع | \text{ اور } | \frac{ع}{و} \text{مف} و | \text{ کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے}$$

ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اس لئے  $| \text{مف} \left( \frac{ع}{و} \right) |$  پر بھی یہ درست

ہوگا۔ یعنی خارج قسمت  $\frac{ع}{و}$  سلسل ہے۔

۴۔ اگر ما ع کا ایک سلسل تفاعل ہو جہاں ع لا کا ایک سلسل تفاعل  
تو ما لا کا ایک سلسل تفاعل ہوگا۔

کیونکہ فرض کر کہ لا کا کوئی اضافہ مف لا ع کا متناظر اضافہ مف ع اور ما  
کا متناظر اضافہ مف ما ہے۔ چونکہ ما ع کا ایک سلسل تفاعل ہے ہم ایک  
مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

$$| \text{مف} ع | > | \text{صہ} | \text{ تو } | \text{مف} ما | > | \text{صہ} |$$

جہاں صہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اور چونکہ  
ع لا کا ایک سلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر  
کہ اگر

$$| \text{مف} لا | > | \text{صہ} | \text{ تو } | \text{مف} ع | > | \text{صہ} |$$



شکل

$$\text{لا} ( \text{لا} + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{1} + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{2} + \dots + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{n} )$$

میں لکھتے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کو کافی بڑا (مطلق قیمت میں) لینے سے ہم پہلے جزو ضربی (لا) کو جس قدر بڑا بنا چاہیں بنا سکتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ دوسرے جزو ضربی کی قیمت لا کے اس قدر قریب لائی جاسکتی ہے جس قدر ہم چاہیں۔ یعنی انکا حاصل ضرب اس قدر بڑا بنا یا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔ مزید برآں اگر لا مثبت ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو لا کی ہے لیکن جب لا منفی ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو لا کی ہے یا اس کے برعکس ہو جب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہو۔

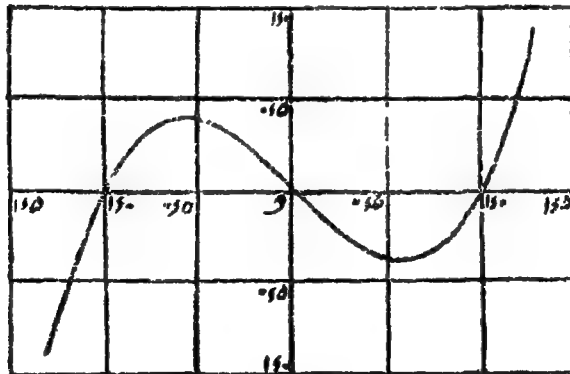
امور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منطق صحیح تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم میں معنی ہر جگہ محور لا سے محدود فاصلے پر واقع ہوتا ہے لیکن اس سے ہٹا جاتا ہے بغیر کسی حد کے جس طرح لا مسلسل طور پر بغیر حد کے بڑھتا ہے خواہ یہ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں۔ یعنی کو عکسلی طور پر بنانے میں مساوات ف (لا) = کو حاصل کر لینا مفید ہوتا ہے (اگر اس کا حل معلوم کرنا ممکن ہو) کیونکہ اس سے یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ منفی محور لا کو کتنے نقاط پر قطع کرتا ہے۔

مثال - منفی ما = لا (لا - ۱) کی ترسیم۔ یعنی محور لا کو نقاط لا = ۰، ۱ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ جب لا = ۰، لا متبادل لا کے لا اتھا چھوٹا ہوتا ہے اس لئے منفی مبدا کے قریب خط مستقیم ما = لا کی شکل تقریباً اختیار کرتا ہے جو دراصل مبدا پر منفی کا ماس ہے۔ چونکہ ما لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے ہم صرف لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معینوں کو محسوب کرتے ہیں۔ ہم یہ آسانی

حسب ذیل جدول مرتب کر سکتے ہیں جہاں صرف دو ملحوظ ہندسوں کو عمل میں قائم رکھا گیا ہے۔

لا	لا	لا	لا
۵۱۰ -	۵۸	۵۱۰ -	۵۱
۵۱۶ -	۵۹	۵۱۹ -	۵۲
۰	۱۵۰	۵۲۶ -	۵۳
۵۲۳ +	۱۵۱	۵۳۳ -	۵۴
۵۵۱ +	۱۵۲	۵۳۸ -	۵۵
۵۸۸ +	۱۵۳	۵۳۸ -	۵۶
$\infty$	$\infty$	۵۳۹ -	۵۷

شکل ذیل اس منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔



شکل (۱۹)

۱۲۔ منطق کیس ہیں۔



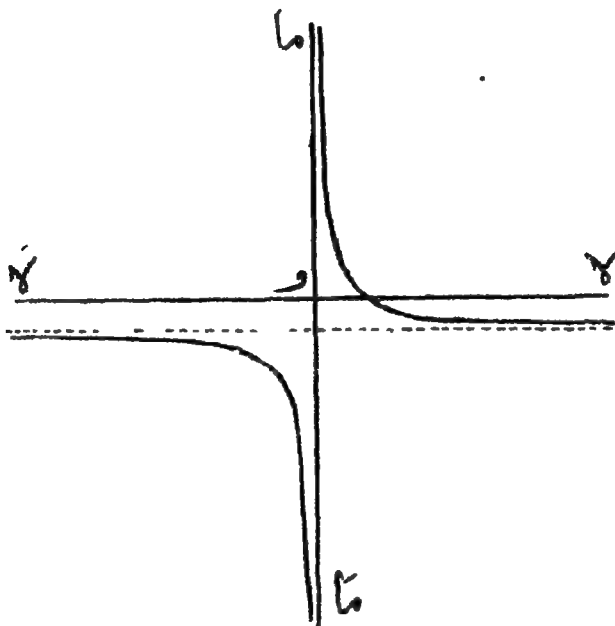


ما مثبت ہے اور اس وقفہ کے باہر مافی۔ مافی دوسری صورت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا  $\pm \infty$  تو ما  $= -\frac{1}{p}$ ، فرید بیر لا اور مافی سب ذیل متناظر اقدیمیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\infty+ \quad '3 \quad '2 \quad '1 \quad '55 \quad '55 \quad '1 \quad '2 \quad '3 \quad '55 = لا$$

$$55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 \quad '55 = ما$$

شکل ذیل منحنی کو ظاہر کرتی ہے۔



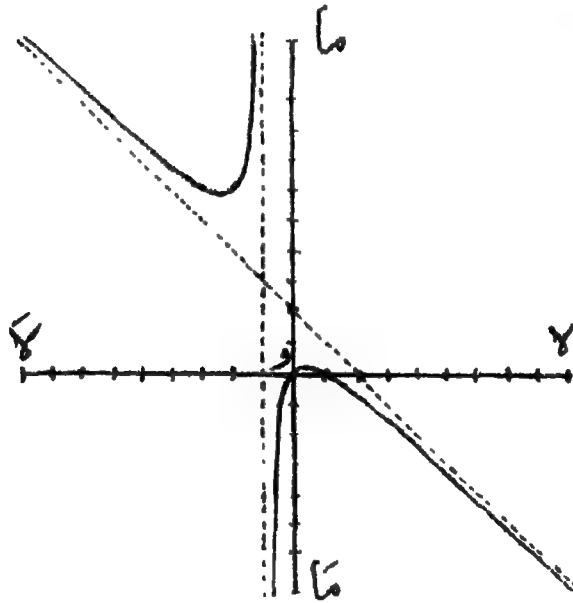
شکل (۱۰)

مثال ۲۔  $ما = \frac{(لا-۱)لا}{لا+۱} = -۲+لا = \frac{۲}{لا+۱}$

یہاں  $لا = ۰$ ، تو  $ما = ۰$  اور  $لا = ۱$  تو بھی  $ما = ۰$  اور  $لا \leftarrow -۱$  تو  $ما \leftarrow \pm \infty$ ،  
 نیز  $ما$  علامت بدلتا ہے جبکہ  $لا$  انیس سے ہر ایک قیمت میں سے گزرتا ہے۔  $لا$  کی  
 بڑی قیمتوں کے لئے خواہ منفی ہوں یا مثبت منحنی کی تقریری شکل

$$ما = - لا + ۲$$

ہو جاتی ہے جو ایک خط مستقیم ہے۔  $لا \leftarrow -۱$  کے لئے یہ منحنی اس خط کے نیچے  
 واقع ہوتا ہے اور  $لا \leftarrow ۰$  کے لئے اس خط کے اوپر۔ شکل (۱۱) میں اس منحنی کو  
 دکھایا گیا ہے۔

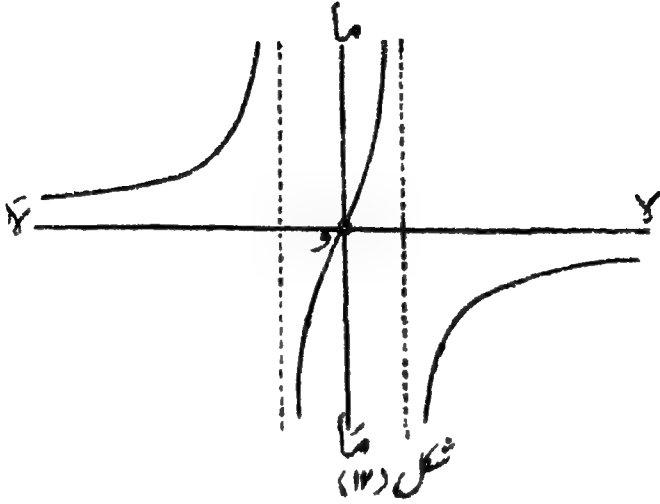


شکل (۱۱)

$$\frac{لا}{لا-۱} = ما \quad \text{شکل ۳-}$$

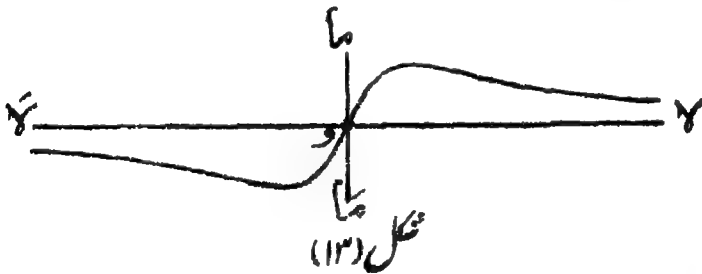
یہاں  $لا = ۰$  اور  $لا \leftarrow \pm \infty$  کے لئے  $ما$  محدود ہو جاتا ہے اور  $لا \leftarrow \pm ۱$   
 کے لئے لامتناہی۔ نیز  $لا < ۱$  کے لئے  $ما$  مثبت ہوتا ہے اور  $لا > ۱$  کے لئے

منفی۔ مزید بریں لا کے ساتھ ما علامت بدلتا ہے۔



شال ۳۔  $\frac{لا^2}{لا+1} = ما$

پچھلی شال کی طرح یہاں بھی لا = ۰ اور لا = ±∞ کے لئے ما معدوم ہوتا ہے اور لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔ لیکن نسب نہ لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے معدوم نہیں ہوتا اس طرح ما ہمیشہ محدود ہوتا ہے۔



۱۵۔ دائری تفاعل۔  
جب لا 'جہ' لا 'مس' لا 'و غیر

کی عام تعریفات علم مثلث کی کسی کتاب سے معلوم ہوگئی۔  
 تفاعل جب لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ کیونکہ  
 مف (جب لا) = جب (لا + مف لا)۔ جب لا

$$= \text{جب } \frac{1}{4} \text{ مف لا } \text{جم} (لا + \frac{1}{4} \text{ مف لا})$$

آخری جزو ضربی ہمیشہ محدود ہوتا ہے اور مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے  
 حاصل ضرب اس قدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔  
 اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم لا مسلسل ہے۔ یہ نتیجہ بہر کیف  
 قبل الذکر میں شکل ہے۔ کیونکہ

$$\text{جم لا} = \text{جب} (لا + \frac{1}{4} \text{ لا})$$

پھر چونکہ

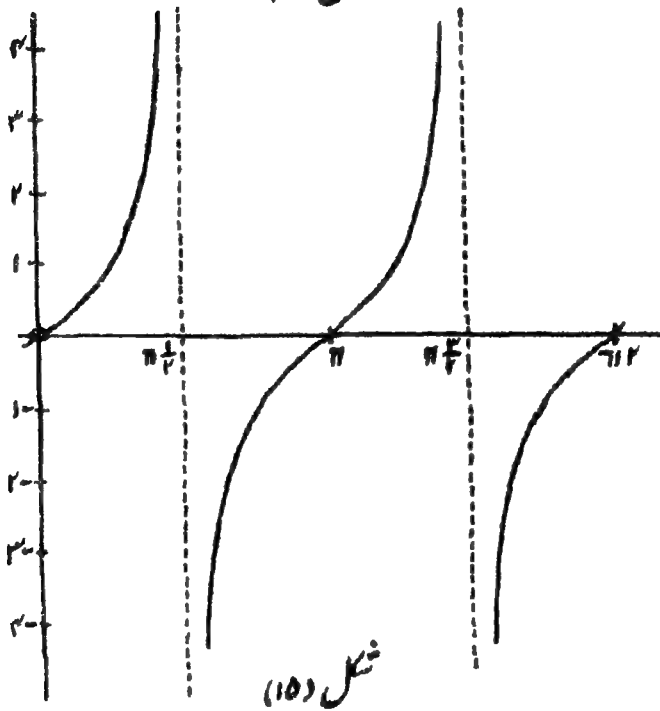
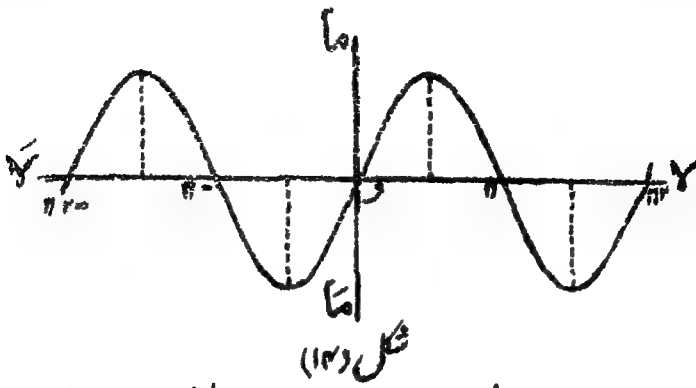
$$\text{مس لا} = \text{جب لا}$$

اور جب لا اور جم لا کا مسلسل ہونا ثابت ہو چکا ہے اس لئے مس لا  
 بھی مسلسل ہے سوائے لا کی ان قیمتوں کے جن کے لئے جم لا = 0 قیمتیں  
 $لا = (ن + \frac{1}{4}) \pi$  سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔  
 اسی طرح قط لا، قم لا، ہم لا کی صورتوں پر بحث ہو سکتی ہے۔  
 صفحہ آئینہ و پر جب لا اور مس لا کی ترسیات بتلائی گئی ہیں۔ طالب علم  
 کو یہ دیکھنا چاہئے کہ کس آسانی سے روابط

$$\text{جب} (- لا) = \text{جب لا} \text{جب} (لا - \pi) = \text{جب لا}$$

$$\text{جب} (لا + \pi) = \text{جب لا} \text{مس} (لا + \pi) = \text{مس لا}$$

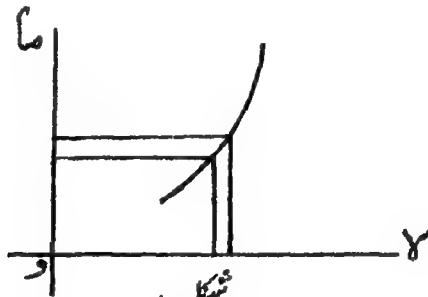
منحنیوں کے تشاکل کو پیش نظر رکھ کر حاصل ہو جاتے ہیں۔



## ۱۶- منقلب تفاعل -

اگر ما 'لا' کا ایک مسلسل تفاعل ہو تو بعض شرائط کے تحت 'لا' کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔ یہ بات اس وقت ہوگی جبکہ 'لا' کی وسعت ایسے حصول میں (جو استثنائی چیزوں کے نہ ہوں) تقسیم ہو سکتی ہو کہ ہر ایک حصہ میں تفاعل 'لا' ہو۔

استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہو جیسے لا بڑھے۔  
 فرض کرو کہ جس طرح لا اور سے ب تک بڑھتا ہے ماکہ سے ب  
 ایک استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے تب ص اور ب کے درمیان ماکہ کسی قیمت کے  
 متناظر اور ب کے درمیان لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی۔ پس  
 اگر ہم اس وقفہ کے اندر ہی لا کی قیمتوں سے سروکار رکھیں تو لا



شکل (۱۶)

ما کا وحید اقیمت تفاعل ہوگا۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ لا، ما کا ایک سلسل تفاعل ہے۔  
 کیونکہ اگر ہم وقفہ مندرجہ بالا کے اندر لا میں کسی مثبت مقدار صہ کا اضافہ کریں  
 تو ما میں بھی ایک محدود مقدار شہ کا اضافہ ہوگا۔ اور شہ سے کم صف ما کی تمام  
 قیمتوں کے لئے صف لا > صہ۔ یہی استدلال اس وقت بھی درست ہے جبکہ لا کا  
 اضافہ منفی ہو۔ پس ہم ایک مثبت مقدار شہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ جب صہ  
 کوئی مقررہ مثبت مقدار ہو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو تو صف لا > صہ، صف ما  
 کی ان تمام قیمتوں کے لئے جن کے لئے صف ما > شہ۔ لیکن یہ لا کے سلسل  
 ہونے کی شرط ہے جبکہ لا، ما کا ایک تفاعل ہو۔ (وقفہ ۸)  
 صہ یا ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جب ما لا = لا سے لا = ب تک کے  
 وقفہ میں استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

اگر ہم اس وقفہ کے پابند نہ ہیں جس میں تفاعل استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہے  
 تو ماکہ کسی دینی ہوئی قیمت کے متناظر لا کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں۔ یہی  
 صورت میں مقلوب تفاعل کو ہم کثیر اقیمت کہیں گے۔ نیز یہ بھی ہو سکتا ہے (اور عام طور پر)

ہوگا کہ ما کی خاص و معنوں میں ما کی قسموں کے متناظر لا کی کوئی قیمتیں حاصل نہیں ہوں  
یعنی مقلوب تفاعل کا وجود نہ ہو۔

اگر ما = ف (لا) ..... (۱)  
تو مقلوب تفاعلی ربط کو بعض اوقات ہم اس طرح بیان کرینگے:-

لا = ف' ا (ما) ..... (۲)

پس ف {ف' ا (ما)، ف (لا)} = ما ..... (۳)

یعنی تفاعلی رموز ف اور ف' ایک دوسرے کو خارج کر دیتے ہیں۔ ترتیم (۲) کی  
بھی وجہ ہے۔

مقلوب تفاعل کی ترتیم اصلی تفاعل کی ترتیم سے صرف لا اور ما کے محوروں کا  
تبادلہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۱- فرض کرو کہ ما = لا، یہ لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے اور اگر لا مثبت ہو تو لا کے  
ساتھ مسلسل بنتا ہے۔ پس لا = ما، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر لا علامت  
کی پابندی نہ کرے تو ما کی قیمت کے متناظر لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان کو عام طور پر  
ما یا ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر ما منفی ہو تو مقلوب تفاعل ما کا وجود نہیں ہوتا۔

مثال ۲- مقلوب دائری تفاعل

جب لا، جہ لا، مس لا، وغیرہ

کی قیمتیں تفاعل ہیں۔

تفاعل جب لا، جہ لا، کا وجود لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے ہے جو  
۱ سے ۱+ کے درمیان واقع ہوں لیکن ان حدود کے باہر قیمتیں ہوں ان کے لئے  
ان تفاعلوں کا وجود نہیں۔

تفاعل مس لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے وجود رکھتا ہے یہ کثیر قیمت تفاعل ہے۔  
لا کی قیمتیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں جنکا فرق مشترک ۱۱ ہے۔

جب لا اور مس لا کی ترتیمات اشکال ۱۱، ۱۲ میں بتلائی گئی ہیں۔

## ۱۔ گروہ کی علوی یا سفلی انتہا۔

قبل اس کے کہ مسلسل تفاعلوں کے نظریہ پر مزید بحث کریں 'علوی' اور 'سفلی' انتہا اور انتہائی کیفیت کی تعریفات کی جچکا تذکرہ و نجات (۲) اور (۴) میں ہو چکا ہے تو سب سے زیادہ مناسب سمجھتے ہیں

سب سے پہلے مقداروں کے ایسے گروہ پر غور کرو جو تعداد میں لا انتہا ہیں لیکن تمام کسی محدود مقدار بہما سے کم ہیں۔ گروہ کی تعریف کسی طور پر ہو سکتی ہے لیکن ضرورت اس میں زیادہ تر صرف ایسی کوئی کی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ کوئی دی ہوئی مقدار اس گروہ سے متعلق ہے یا نہیں۔ مثلاً ایک گروہ ان قیمتوں پر مشتمل ہو سکتا ہے جو ایک دیا ہوا تفاعل (سلسلہ ہویا نہ ہو) اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متبوع کسی محدود باغیچہ و وسعت میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

اس قسم کے گروہ میں ممکن ہے کہ "بڑی سے بڑی" مقدار موجود ہو یا نہ ہو یعنی ایسی مقدار جس سے باقی مقداریں تجاوز نہیں کر سکتیں۔ لیکن ہر صورت میں گروہ کی مقدار کی ایک 'علوی' انتہا ضرور ہوگی یعنی ایسی مقدار جس سے کسی مقدار اس سے تجاوز نہ کر سکتی ہو اور (کم سے کم) ایک مقدار معلوم ہو سکے گی جو گروہ کی کسی ایک ایسی مقدار سے بڑا ہو جو دہما سے کم ہو۔ اگر دہما خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی ایک لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہوں جو دہما سے کم ہے۔

ان بیانات کا ثبوت دفعہ (۲) کی طرح ہندسی تعبیری مدد سے مستنبط ہو سکتا ہے۔

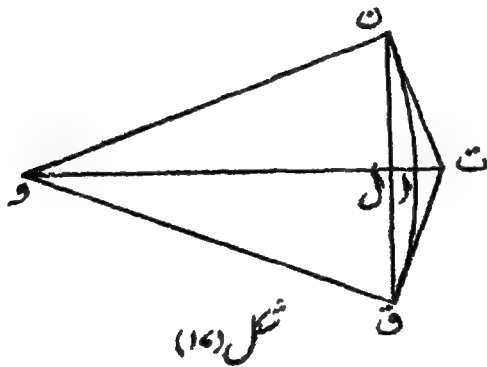
اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لا انتہا ہی گروہ ہو جن میں سے ہر ایک ایک محدود مقدار دہما سے بڑی ہے تو گروہ میں ممکن ہے کہ "کم سے کم" مقدار ہو یا نہ ہو لیکن ہر صورت میں ایک 'سفلی' انتہا نہ ہوگی اس طور پر کہ گروہ کی کوئی مقدار دہما سے کم نہیں ہوتی حالانکہ اگر کوئی مقدار بھی نہ ہو جو نہ سے بڑی ہو تو (کم از کم) ایک مقدار گروہ کی معلوم ہو سکتی جو اس سے سب سے چھوٹی اور اگر نہ خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک مقدار سے کم ہوں



جو نما سے بڑی ہے۔

ایک عمدہ مثال دائرہ کے محیط یا گھیرے کی تعریف میں پیش آتی ہے۔  
دائرہ کے محیط پر نقطوں کی کوئی تعداد لیکن کوئی ترتیب دار لایا جائے تو ایک  
اندرونی کثیر الاضلاع حاصل ہوتا ہے۔ اور اگر ان نقاط پر تماس کھینچے جائیں تو بیرونی  
یا باہر کثیر الاضلاع ملتا ہے۔ اب یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی اندرونی  
کثیر الاضلاع کا گھیرا بیرونی کثیر الاضلاع کے گھیرے سے کم ہے۔ اگر تمام کمرے اندرونی  
کثیر الاضلاعوں کے کل گروہ پر غور کیا جائے تو گھیروں کی ایک خاص علوی انتہا  
ہوگی۔ اسی طرح تمام ممکن بیرونی کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی ایک سفلی انتہا  
ہوگی۔

مہندان دونوں انتہاؤں کو ایک ہی ہونا چاہئے۔ کیونکہ فرض کرو کہ  $T$  ق  
اندرونی کثیر الاضلاع کے گروہ میں سے ایک کا ایک ضلع ہے۔  $T$  اور  $Q$  ت  
نقاط اور  $Q$  پر تماس ہیں۔



فرض کرو کہ  $W$  مرکز ہے اور  $T$  ق،  $Q$  ت کو مل پر ملتا ہے۔ تب  $T$  ق  
اور  $Q$  ت بیرونی کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے حصے ہوں گے اور اگرچہ حاصل  
جمع کی علامت ہو تو دونوں کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی  
نسبت ہوگی



لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے  $ما = م$ ۔ یہی حال غلی اتہا کا ہے۔  
ایسے تفاعل کی صورت میں جو زیر بحث وسعت میں استدلال کے ساتھ بڑھتا یا استدلال  
کے ساتھ گھٹتا ہے یہ مسئلہ خود واضح ہے۔ اس صورت میں بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں  
سر یکا وسعت کے سرور پر واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے یہ مسئلہ تو سب سے اس وقت بھی  
درست ہے جبکہ تفاعل اس طرح کا ہو کہ وسعت وقفوں کی ایک محل و تعداد  
میں تقسیم ہو سکے جن میں سے ہر ایک وقفہ میں تفاعل یا تو مسلسل بڑھتا ہے یا مسلسل  
گھٹتا ہے۔

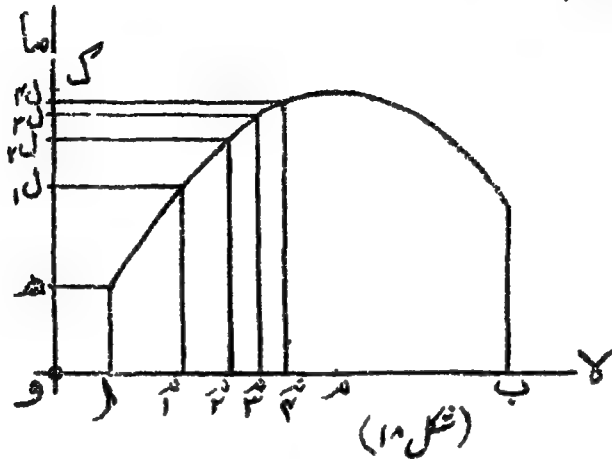
اس مضمون کے استعمالات میں درحقیقت جن تفاعلوں سے ہمیں سابقہ  
پڑتا ہے ان میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے، لیکن وہ اصول جن کی مدد سے کسی  
دی ہوئی صورت میں ہم اس کی تحقیق کرتے ہیں ایسے استدلال سے قائم کئے جاتے  
ہیں جس میں دفعہ ہذا کے مسئلہ کی صداقت مان لی جاتی ہے۔ دیکھو دفعہ (۴۸)۔  
اس لئے منطق کے نقطہ نظر سے ایسے ثبوت کا فراہم کرنا بہتر ہوگا جس میں زیر بحث  
تفاعل سے متعلق کسی چیز کو نہ مان لیا گیا ہو سوائے اس کے کہ وہ بموجب تعریف  
دفعہ (۸) مسلسل ہے۔

سب ذیل اس طرح کے ثبوت کا خاکہ ہے۔ ہندسی تعبیر میں فرض کرو کہ  $ا = ۱$  و  $ا' = ۱$   
و  $ب = ۱$ ۔ اگر  $ا$  ہمہ ما کی قیمت علوی اتہا  $م$  کے مساوی نہیں ہے تو  $م$   
سے کم ہوگی۔ اس کو  $ما$  سے تعبیر کرو۔  
لاستنباہی طریقوں سے ہم متاویز

‘ما’ ‘ما’ ‘ما’ .....

کا ایک معدودی تو اتز معلوم کر سکتے ہیں جس کی علوی اتہا  $م$  ہو۔ مثلاً ہم  $ما$  کو  $ما$  اور  
 $م$  کے اوسط حسابی کے مساوی لے سکتے ہیں ‘ما’ کو  $ما$  اور  $م$  کے اوسط  
حسابی کے مساوی اور علی ہذا القیاس۔ چونکہ وسعت  $ا$   $ب$  میں  $ما$  کی قیمت  
 $ما$  سے بہ لکر کوئی مقدار ہو سکتی ہے جو  $م$  سے کم ہو ‘لا’ کی کم سے کم ایک  
قیمت ضرور ہوگی (دفعہ ۹) جس کے لئے  $ما$  درمیانی قیمت  $ما$  اختیار کرتا ہے فرض کرو

۱۱۔ اس قیمت کو تعبیر کرتا ہے یا (اگر ایک سے زیادہ ہوں تو) اس طرح کی قیمتوں میں سے سب سے چھوٹی قیمت کو۔



اسی طرح فرض کرو کہ لا کی سب سے چھوٹی قیمت لا ہے جس کے لئے  $\lambda = 0$  مقرر ہو جاتا ہے۔  
یہ ظاہر ہے کہ مفادیر

(جوشل میں نقاط ص، م، ہ سے تعبیر ہوتے ہیں) ایک معدی توانا بن کر  
ہونے چاہئیں۔ فرض کرو کہ اس توانا کی علوی انتہا ہے۔ اب چونکہ ہر کے بائیں پاس  
کسی دست میں خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو ایسے نقاط ہوتے ہیں جن پر فاعل سے مستدر  
فرق دکھاتا ہے جو کسی مقررہ مقدار سے کم ہے متاعل کے شمل سے۔ یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خود  
نقطہ ہر فاعلی قیمت ص کے سوا کوئی اور نہیں ہو سکتی۔

[۱] شکل صرف وضاحت کی خاطر کیجی گئی ہے اور ثبوت کے لئے ضروری نہیں۔ درحقیقت یہ ظاہر ہے کہ جس تعامل کو ٹھیک طور پر ترمیمی طور پر تعمیر کیا جاسکتا ہے اُس میں اس خاصیت کا ہونا ضروری ہے اور اور یہاں ثبوت اس کی صورت میں غیر ضروری ہوگا۔

شکل میں وگ = مہ، وھر = باؤل، ماؤل = مار..... اور تواتر

کو متذکرہ بالا طریقہ سے مائل کرنے میں لہجہ کی تفسیر کرتا ہے لہجہ کی تفسیر کی

تخفیف کرتا ہے، لہٰذا 'ن' کی تخفیف کرتا ہے اور علیٰ ہذا۔

اب یہ دیکھنے کے لئے کہ خیار مسلسل تفاعلوں کی صورت میں مسئلہ بالا عام طور پر صادق نہیں آتا، اسے تفاعل پر غور کرو جو اس طرح حاصل ہوتا ہے: فرض کرو کہ 'ن' کے لئے ہوا 'لا' کی اور قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت جمع 'لا' ہے اور 'لا' = کے لئے تفاعل کی قیمت فرض کرو صفر ہونے ہے۔ تفاعل کی علوی انتہا اسے جبکی طرف 'لا' کو کافی چھوٹا لینے سے اس قدر قریب لایا جاسکتا ہے جسقدر ہم چاہیں لیکن یہ کہیں اس انتہا کو نہیں پہنچتا۔

۱۹۔ تفاعل کی انتہائی قیمت = ان قیمتوں کے کل گروہ پر غور کرو جو ایک تفاعل مادر سلسل یا غیر سلسل اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متغیر 'لا' ایک ثابت قیمت 'لا' کے ایک جانب کے کسی دفعہ میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ فرض کرو کہ جس طرح 'لا' کے قریب آتا ہے، 'لا' کسی ثابت مقدار 'لا' کے قریب اس میں آتا ہے کہ 'لا' کو کافی طویل چھوٹا لینے سے اس بات کا یقین ہو سکتا ہے کہ 'لا' کی اس قیمت یا اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے 'لا' کی قیمت شمار سے کم ہوتی ہے جہاں شاید کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خود بخود ہی چھوٹی ہو۔ ان شرائط کے تحت ہم کہتے ہیں کہ 'لا' کافی انتہائی قیمت ہے جبکہ 'لا' زیر بحث جانب سے 'لا' کے قریب آئے۔ اس ربط کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

نہا = لا

لیکن ٹھیک محنت تو اس میں ہے کہ اس کی تخصیص بھی کر دیجائے کہ 'لا' کے کس جانب سے قریب آتا ہے۔

مذکورہ بالا ربط کے ساتھ دفعہ (۹) کی تعریف پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل کی صورت میں

نہا = ف (لا) = ف (لا) ..... (۱)

حاصل ہوتا ہے۔ یعنی تفاعل کی انتہائی قیمت خود تفاعل کی قیمت پر منطبق ہوتی ہے اور یہ کہ اگر لام متغیر متبوع کی وسعت کے اندر واقع ہو تو لام خواہ کسی جانب سے لام کے قریب آئے یہ خاصیت درست ہے۔ لیکن اگر لام وسعت کے کسی سرے پر منطبق ہو تو لام کا وسعت کے اندر سے لام کے قریب آنا ضروری ہے۔

برعکس اس کے جب تک شرط (۱) پوری نہ ہو تفاعل سلسل نہیں ہو سکتا۔ اب ایسے تفاعل پر غور کرو جس کے متغیر متبوع کی وسعت مثبت لام کی مستحکم غیر محدود ہے۔ اگر لام کو تسلسل بڑھانے سے ما ایک ثابت قیمت لہا کی طرف مل ہو اس طرح کہ لام کو کافی بڑھانے سے ہم یہ یقین کر سکیں کہ لام کی اس قیمت اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے ا ما۔ لہا ا شما سے چھوٹا ہوگا جہاں شما کوئی مقررہ مثبت مقدار ہے خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو تب لام  $\infty$  کے لئے لہا کو ماکہ انتہائی قیمت کہتے ہیں اور ہم کہتے ہیں

$$\text{نہا} = \text{ما} = \text{لہا} \quad \infty$$

اسی طرح کی تعریف

$$\text{نہا} = \text{ما} \quad \infty$$

۳۵ کی ہے جب یہ موجود ہو اور تفاعل کے متغیر متبوع کی وسعت منفی لام کی سمت میں غیر محدود ہو۔

## ۲۰۔ انتہائی قیمتوں سے متعلق عام مسائل۔

۱۔ تفاعلوں کے کسی محل ود تعداد کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۲۔ تفاعلوں کے کسی محل ود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام

انتہائی قیمت محدود ہوں۔  
۲۰۔ تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ انتہائی قیمتیں محدود ہوں اور مقسوم علیہ صفر نہ ہو۔

ان مسائل کے ثبوت کا طریقہ وہی ہے جو دفعہ (۱۲) میں دیا گیا ہے۔ اس دفعہ کے مسائل مسائل بالا کی خاص صورتیں ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ  $\frac{a}{b}$  کے دو تفاعل  $\frac{c}{d}$  و  $\frac{e}{f}$  اور جس طرح  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$  کے قریب آتا ہے ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب  $\frac{c}{d}$  و  $\frac{e}{f}$  ہوتی ہیں۔ تب اگر ہم

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$  کے جنکی انتہائی قیمتیں صفر ہیں۔  
۱۔

$$(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) - (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{e}{f} = \frac{c}{d} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{e}{f}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f} - \frac{e}{f}$$

اور دفعہ (۱۲) کی طرح  $\frac{a}{b}$  کو کافی طور پر  $\frac{c}{d}$  کے قریب لائے ہم مذکور بالا شرائط کے تحت بائیں طرف کو مطلق قیمت میں کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔

۲۱۔ مثالیں۔

ہم نے دفعہ (۱۹) میں یہ دیکھا ہے کہ ایک مسلسل تفاعل کی انتہائی قیمت متغیر تبعد  $\frac{a}{b}$  کی کسی قیمت کے لئے خود تفاعل کی قیمت ہوتی ہے بشرطیکہ  $\frac{a}{b}$  کی اس قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت موجود ہو۔ لیکن متغیر متغیر کی چند انتہائی قیمتوں پر کی قیمتوں کے لئے لیکن بہت کہ تفاعل کا وجود نہ ہو یا تفاعل غیر متغیر ہو جائے حالانکہ  $\frac{a}{b}$  کی ان قیمتوں کے لئے جو ان قیمتوں سے لائنیں

فرق کہتی ہیں 'تفاعل' موجود ہو۔ یہی وہ صورتیں ہیں جن میں 'انتہائی قیمت' کا خیال زیادہ اہم ہو جاتا ہے۔  
مثال ۱۔ تفاعل

$$1 - 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$$

یہاں ۱ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے تمام جبری اعمال جاری ہو رہے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ لا کی قیمت صفر ہو جائے۔ اس صورت میں کسری شکل صفر ہو جاتی ہے۔ اب غارج قیمت کے لئے یہ تقریف ہے کہ اگر اس کو ب سے ضرب دیا جائے تو لا حاصل ہو اور چونکہ کسی محدود مقدار کو صفر سے ضرب دینے سے صفر حاصل ہوتا ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ صفر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اس کو 'غیر معین' کہتے ہیں۔

اہر کیف دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نامہ کو ۱ + ۱ - لا سے ضرب دیکر ہم اس کو اس شکل

$$1\frac{1}{2}$$

میں رکھ سکتے ہیں اور یہ کسر ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سوائے صفر قیمت کے

$$1 + 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$$

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ یہ تفاعل مسلسل ہے اور لا = ۰ کے لئے اس کا وجود ہے اس لئے لا = ۰ کے لئے اس کی انتہائی قیمت  $\frac{1}{2}$  ہے۔  
مثال ۲۔ تفاعل

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$$



پر غور کرو۔ یہاں جس طرح لا مسلسل بڑھتا ہے یہ تفاعل غیر معدن شکل  $\infty - \infty$  اختیار کرنے پر مائل ہوتا ہے۔ لیکن تفاعل کو

۱

کی متماثل شکل میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا  $\infty$  کے لئے اس کی انتہائی قیمت صفر پر جاتی ہے۔  
مثال ۳۔ دئے ہوئے تفاعل کے استراز کے دور کو سمت صا کا تفاعل قرار دیں، تو صفر اور ۳ کے درمیان صا کی تمام قیمتوں کے لئے دور کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن صا کی انتہائی قیمتیں صفر اور ۳ لینے پر اس کا وجود نہیں ہوتا۔ یہ کیفیت جس طرح صا صفر کے قریب آتا ہے دور ایک خاص انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس انتہائی قیمت کو علم حرکت میں اس طور پر موسوم کیا جاتا ہے کہ یہ لا انتہا چھٹی قوس میں استراز کا وقت ہے

۲۲۔ چند خاص انتہائی قیمتیں۔

حسب ذیل مثالیں تفرقی احصا میں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔  
۱۔ م کی تمام مشتق قیمتوں کے لئے

$$\text{نہا} = \frac{\text{لا}^1 - \text{لا}^2}{\text{لا}^1 - \text{لا}^2} = \text{م} \quad (۱)$$

اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{نہا} = \frac{\text{لا}^1 - \text{لا}^2}{\text{لا}^1 - \text{لا}^2} = \text{نہا} (\text{لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^2 - \text{لا}^3 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 + \dots + \text{لا}^{2-2} - \text{لا}^{2-1} + \text{لا}^{2-1} - \text{لا}^1)$$

$$\text{م} = \text{لا}^1 - \text{لا}^2$$

کیونکہ ارتقام کی تعداد (م) محدود ہے اس لئے مجموعہ کی انتہائی قیمت مختلف ارتقام کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دفعہ ۲۰)۔

اگر م منطق کسر ہو تو فرض کر دو کہ یہ کسر  $\frac{پ}{ق}$  ہے۔ نیز فرض کر دو کہ

$$لا = ما، ر = ب$$

$$\frac{لا - ر}{لا - ر} = \frac{ما - ب}{ما - ب} = \frac{ما - ب}{ما - ب}$$

تو  
یہ کسر

$$\frac{ما - ب}{ما - ب}$$

$$\frac{ما - ب}{ما - ب}$$

کے مساوی ہے۔ پہلی صورت ہے اس کسر کے شمار کنندہ کی انتہائی قیمت پ ب پ اور نسب نامہ کی انتہائی قیمت ق ب ق ہے۔ اس لئے مطلوبہ انتہا

$$\frac{پ}{ق} = \frac{پ - ب}{ق - ب} = \frac{پ - ب}{ق - ب}$$

ہے جو وہی ہے۔

اگر م منہی ہو تو فرض کر دو کہ م = ن جس سے

$$\frac{لا - ر}{لا - ر} = \frac{لا - ر}{لا - ر} = \frac{لا - ر}{لا - ر}$$

اگر م منطق ہو تو اس کی انتہائی قیمت پہلی صورتوں کی مدد سے

$$\frac{پ}{ق} = \frac{پ - ب}{ق - ب} = \frac{پ - ب}{ق - ب}$$

۱- ہے۔

۲- یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

$$\text{نہا} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱ \text{، نہا} = \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} = ۱ \dots\dots\dots (۲)$$

اگر ہم دائرہ کی قوس کے 'طول' کی تعریف (دفعہ ۱۷) کی طرف رجوع کریں تو ان بیانات کی صداقت خود بخود واضح ہو جاتی ہے۔ شکل (۱۷) میں اگر زاویہ ن وق چار قائموں کا  $\frac{1}{4}$  ہو تو ن  $\times$  ن ق، ن ضلعوں والے اندرونی منظم کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا اور ن (ت ن + ت ق) متناظر حاط کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا۔  
اب اگر

$$\begin{aligned} \text{طہ} &= > \text{ن و ا} = \frac{\pi}{\text{ق}} \\ \text{تر} &= \frac{\text{تر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ل}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} \\ \text{اور} &= \frac{\text{ت ن + ت ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ت}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} \end{aligned}$$

پس کسور

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} \text{ اور } \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}}$$

سے وہ نسبتیں تعبیر ہوتی ہیں جو متذکرہ بالا کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔ پس ن جب مسلسل بڑھتا ہے تو ہر کسر انتہائی قیمت میں اکائی کی طرف مائل ہوتی ہے (دفعہ ۱۷)۔

استدلال بالا میں یہ مان لیا گیا ہے کہ طہ  $\pi$  کا زیر اضعاف ہے۔ لیکن شکل میں زاویہ ن وق کی قیمت کچھ ہی ہو ہر صورت میں وتر ن ق  $>$  قوس ن ق اور ت ن + ت ق  $<$  قوس ن ق

یعنی  $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} > ۱$  اور  $\frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} < ۱$ ۔ پس ان کسروں کی علی الترتیب اوپر کی اور نیچے کی انتہا ہونی چاہئے اور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ انتہائیں اکائی کے سوا کچھ اور نہیں ہو سکتیں۔

ذیل کی عددی جدول سے یہ معلوم ہوگا کہ کس طرح متذکرہ بالا متفاعل طہ کو مسلسل گھٹانے سے اپنی مشترک انتہا کے قریب آتے ہیں۔

ن	$\frac{\text{طہ}}{\pi}$	جب طہ	س طہ
۴	۵۲۵	۵۹۰۰۳۲	۱۵۲۷۳۲۴
۵	۵۲۰	۵۹۳۵۲۹	۱۵۱۵۶۳۳
۱۰	۵۱۰	۵۹۸۳۶۳	۱۵۰۳۲۲۵
۲۰	۵۰۵	۵۹۹۵۸۹	۱۵۰۰۸۳۱
۳۰	۵۰۲۵	۵۹۹۸۹۷	۱۵۰۰۲۰۶
$\infty$	۵۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰

تیسرے اور چوتھے خانوں میں وہ نسبتیں درج ہیں جو ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی یا حاملہ منتظم کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔

۲۳۔ صفاریات۔ جب کوئی متغیر مقدار کسی عمل میں انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مقدار آخر کار معدوم ہو جاتی ہے یا "لا انتہا چھوٹی" ہے۔

دو لا انتہا چھوٹی مقادیر مساوی کہلاتی ہیں جب ایک کو دوسری سے جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت ایک ہو۔ مثلاً طہ جب صفر انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے تو جب طہ اور طہ آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں (صفحہ ۲۲ مثال ۲)۔ لا انتہا چھوٹی مقداروں کے رتبوں میں تمیز کرنا بعض اوقات ضروری ہو جاتا ہے پس اگر 'و' دو مقادیر ہوں جو صفر کی طرف مائل ہوتی ہیں اور اگر نسبت  $\frac{و}{و}$  محدود ہو اور صفر نہ ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ و لا انتہا چھوٹی مقدار ہے جسکا

رتبہ وہی ہے جو ع کا ہے۔ لیکن اگر نسبت  $\frac{و}{ع}$  مفر کے مساوی ہو جائے تو ہم کہتے ہیں کہ  $\frac{و}{ع}$  انتہا چھوٹی مقدار ہے مگر اس کا رتبہ  $\frac{و}{ع}$  کے رتبہ سے بڑا ہے۔ اگر  $\frac{و}{ع}$  کی انتہا محدود ہو اور مفر نہ ہو تو  $\frac{و}{ع}$  کم و میں رتبہ کا صفاری کہتے ہیں جبکہ  $\frac{و}{ع}$  کو معیار قرار دیا جائے۔

مثال ۱۔ شکل ۱ میں جب زاویہ  $\angle$  و ق کو لا انتہا ادا جائے تو  $\frac{و}{ع}$  اور  $\frac{ل}{ا}$  آفر کا مساوی ہو جاتے ہیں۔ کیونکہ مستطاب مثلثوں کی مدد سے

$$\frac{و}{ع} = \frac{و}{ل} \quad \text{اور اس سے}$$

$$\frac{و}{ع} = \frac{و}{ل} = \frac{و}{و} = 1$$

$$\frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ا}$$

اور نسبت  $\frac{و}{ع}$  کی انتہائی قیمت ایک ہے۔

پھر  $\frac{ل}{ا}$  سے دوسرے رتبہ کا صفاری ہے اگر  $\frac{ل}{ا}$  معیار قرار دیا جائے کیونکہ

$$\frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ل} = 1$$

پھر  $\frac{ل}{ا}$  سے  $\frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ل} = 1$  (انتہا میں)

مثال ۲۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$1. \text{ جم } ط = 2 \text{ جب } \frac{1}{ط} = \left( \frac{1}{ط} \right) \times \frac{1}{ط} \dots (1)$$

جب  $\frac{1}{ط}$  پہلے جزو ضربی کی انتہا ایک ہے۔ اس لئے ۱۔ جم  $\frac{1}{ط}$  دوسرے رتبہ کا صفاری ہے جبکہ معیار  $\frac{1}{ط}$  ہو۔

پھر

$$\text{س } \frac{1}{\text{ط}} - \text{جب } \frac{1}{\text{ط}} = \left( \frac{\text{جب } \frac{1}{\text{ط}}}{\frac{1}{\text{ط}}} \right) \times \frac{\text{جم } \frac{1}{\text{ط}}}{\text{جم } \frac{1}{\text{ط}}} \times \frac{1}{\text{ط}} \dots (۲)$$

جب  $\frac{1}{\text{ط}}$  ہے۔ تو پہلے دو اجزائے ضربی میں سے ہر ایک انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ پس س  $\frac{1}{\text{ط}}$ ۔ جب  $\frac{1}{\text{ط}}$  تیسرے رتبہ کا صغاری ہے یہ شکل میں اس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ ن ت۔ ن لی آخر کار تیسرے رتبہ کا ہے جبکہ ن (۱) معیار ہو۔ اصول ذیل کو پیش نظر رکھ کر ہم مختلف دیلیوں کو اختصار کے ساتھ بیان کر سکتے ہیں خصوصاً ایسی صورتوں میں جبکہ حصہ کو ہندسہ اور علم حیل میں استعمال کیا جائے۔ اگر عا اور دیا ایک ہی رتبہ کے دو صغاریات ہوں اور اگر عا اور دیا دوسرے صغاریات ہوں جو آخر کار بالترتیب عا اور دیا کے مساوی ہو جائیں تو

$$\text{نسا} \left( \frac{\text{عا}}{\text{دیا}} \right) = \text{نسا} \left( \frac{\text{عا}}{\text{دیا}} \right) \dots (۳)$$

$$\text{کیونکہ} \quad \frac{\text{عا}}{\text{دیا}} = \frac{\text{عا}}{\text{عا}} \times \frac{\text{دیا}}{\text{دیا}} \times \frac{\text{عا}}{\text{عا}} \dots (۴)$$

اور بائیں طرف کے پہلے دو اجزائے ضربی کی انتہائیں بموجب فرض ایک کے مساوی ہیں۔ دفعہ ۲۰ سے نتیجہ زیر بحث حاصل ہو جائیگا۔

جب کوئی متغیر مقدار دوران عمل میں بلا ٹکڑی بل تعین مقدار سے بھی بڑھ جاتی ہو تو اس کو 'لا انتہا بڑی' مقدار کہا جاتا ہے۔ اور اگر اس قسم کی کسی مقدار کو معیار قرار دیا جائے تو کسی دوسری مقدار کو ہم 'وین رتبہ کی لا انتہا بڑی' مقدار کہا جاتا ہے جبکہ  $\frac{1}{\text{ع}}$  کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو۔

### اشکۂ نمبری ۱

#### (جمہری تفاعل)

۱۔ ایک ہی شکل میں لا انتہا کی ترکیبات حسب ذیل صورتوں میں معلوم کرو:-

\* اس اصول کے استعمال کی اچھی مثال دفعہ ۶۳ میں ملے گی۔

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

جیکہ لاکھ کی وسعت . سے ۱۶۲ تک ہو۔

$$(1) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(2) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(3) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(4) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(5) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(6) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(7) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

$$(8) \quad (1-1) (2-1) (3-1) \dots (n-1) = 1$$

کی ترتیبات کھینچو۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

کی ایک اصل - ۵۵ اور - ۱ کے درمیان 'دوسری اصل' - ۱ اور صفر کے درمیان اور تیسری اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

\* پیانہ کے مناسب ٹھیکوں کو بہت احتیاط سے کھینچنا چاہئے۔ اس مقصد کے لئے چھوٹے مربعوں والے مربع دار کاغذ کا استعمال مفید ثابت ہوگا۔ ضمیمہ میں (ب) 'ج' جدولوں میں (اعداد کے مربع 'بذر المربع' اور ان کے مخالفی وئے گئے ہیں جن سے حسابی عمل میں بعض اوقات آسانی پیدا ہو جائے گی۔

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۲ لا^۲ + ۳ لا^۱ + ۳ لا^۰ = ۵$$

کی تین حقیقی اصلیں ہیں۔ تقریبی طور پر ان کے مقامات معلوم کرو۔

$$۵۔ مساوات \quad ۲ لا^۲ - ۳ لا^۱ - ۳ لا^۰ + ۱۰ = ۰$$

کی اصلوں کے مقامات کی تعین تقریبی طور پر کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ طاق درجے کی ہر جبری مساوات کی کم سے کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور جفت درجے کی ہر مساوات میں جس کی پہلی اور آخری رٹوں کے سر مختلف المعالامت ہوں کم سے کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں جن میں سے ایک مثبت اور دوسری منفی ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲

(دائری تفاعل)

۱۔ تفاعیل ذیل کی ترتیبیں کیجئے۔

$$(۱) \quad ۱م \quad لا^۱, ۱م \quad لا^۰ + ۱م \quad لا^۱ + ۱س \quad لا^۰$$

$$(۲) \quad ۱ج \quad لا^۱, ۱ج \quad لا^۰ + ۱س \quad لا^۱ + ۱س \quad لا^۰$$

$$(۳) \quad ۱ج \quad لا^۱ + ۱ج \quad لا^۰ + ۱ج \quad لا^۱ + ۱ج \quad لا^۰$$

$$(۴) \quad ۱ج \quad لا^۱, ۱ج \quad لا^۰ + ۱ج \quad لا^۱ + ۱ج \quad لا^۰$$

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$ج \quad لا^۱ - لا^۰ + ۱ج \quad لا^۱ = ۰$$

کی ایک اصل ۲۳ اور  $\frac{۲۳}{۲}$  کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۳

(تواتر)

۱۔ متادیر

$$۲ن$$

$$\frac{۲ن}{۱+۲}$$



کی علوی اور مغلی انتہائیں معلوم کر دیجئے کہ  $۱'۲'۳'۴'۵'۶'۷'۸'۹'۱۰'۱۱'۱۲'۱۳'۱۴'۱۵'۱۶'۱۷'۱۸'۱۹'۲۰'۲۱'۲۲'۲۳'۲۴'۲۵'۲۶'۲۷'۲۸'۲۹'۳۰'$  اگر تو اتر

.....  $۱'۲'۳'۴'۵'۶'۷'۸'۹'۱۰'۱۱'۱۲'۱۳'۱۴'۱۵'۱۶'۱۷'۱۸'۱۹'۲۰'۲۱'۲۲'۲۳'۲۴'۲۵'۲۶'۲۷'۲۸'۲۹'۳۰'$

میں  $۱۰ + ۱ = ۱۱$  ج + ج  
جہاں م اور ج مثبت ہیں اور  $م > ۱$  تو اتر کی انتہا  $\frac{ج}{م-۱}$  ہوگی خواہ  $۱$  کی  
کچھ ہی قیمت ہو۔  
۲- مقادیر

.....  $\sqrt{۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲+۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷+۲۸+۲۹+۳۰}$

جہاں  $۱۰ + ۱ = ۱۱$   
ایک صعودی تو اتر بناتی ہیں جس کی انتہا ۲ ہے۔

۴- اگر  $۱۰ + ۱ = ۱۱$   $۱۱ + ۱ = ۱۲$

جہاں  $۱۰$  اور  $۱$  مثبت ہیں تو تو اتر صعودی یا نزولی ہوگا بموجب اس کے کہ  $۱۰$  مساوات  
 $۱۰ + ۱ = ۱۱$  کی مثبت اصل سے چھوٹا یا بڑا ہو اور ہر صورت میں اس کی انتہا یہ اصل ہو  
۵- تو اتر کی نوعیت کی جانچ کر جس میں

$$\frac{۱۰}{۱+۱} = ۱۱$$

جہاں  $۱۰$  مثبت ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر  $۱$  مثبت ہو تو تو اتر کی انتہا 'مساوات'  
 $۱۰ + ۱ = ۱۱$  کی مثبت اصل ہے۔

۶- ایسی مقداروں کا تو اتر معلوم کر دو مساوات

$$۱۰ + ۱ = ۱۱$$

کی مثبت اصل کے قریب آئیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ قانون

$$\frac{لا}{س} = \frac{لا}{س}$$

کے بموجب بننے والے قوت ترکیز، نہ مساوات  $\frac{لا}{س} = \frac{لا}{س}$  کی اقل مثبت اہل ہے جہاں  $\frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  کے درمیان دفع ہوتا ہے۔

۸۔ اگر  $\frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  کے درمیان حسابی اور موسیقی اور وسط بالترتیب  $\frac{لا}{س}$  ہیں اور  $\frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  مثبت ہوں، ایسے قوتوں کی مشترک انتہا  $\frac{لا}{س}$  ہوتی ہے جنکی  $\frac{لا}{س}$  و  $\frac{لا}{س}$  بالترتیب  $\frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  ہیں۔

۹۔ اگر  $\frac{لا}{س} = \frac{1}{4} (\frac{لا}{س} + \frac{لا}{س}) = \frac{لا}{س} = \frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  مثبت ہوں تو قوت ترکیز کی  $\frac{لا}{س}$  و  $\frac{لا}{س}$  ایک مشترک انتہا کی طرف مستحق ہوتے ہیں۔  
(اس انتہا کو  $\frac{لا}{س}$  اور  $\frac{لا}{س}$  کے درمیان حسابی ہندسی اوسط کہتے ہیں)

امثلہ نمبری ۴  
(تفاضلوں کی انتہائی قیمتیں)

۱۔  $\frac{لا}{س} \leftarrow \frac{لا}{س}$  کے لئے

$$\frac{جب \frac{لا}{س}}{\frac{لا}{س}} ، \frac{س \frac{لا}{س}}{\frac{لا}{س}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۔  $\frac{لا}{س} \leftarrow \frac{لا}{س}$  کے لئے

$$\frac{جب \frac{لا}{س}}{\frac{لا}{س}} ، \frac{س \frac{لا}{س}}{\frac{لا}{س}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

$$۳ - \frac{ما}{لا} = \frac{جب لا}{لا} ، \frac{۱ - جم لا}{لا}$$

کی ترتیبیں بناؤ۔

۴ - ثابت کرو کہ

$$\frac{نبا}{لا} = \frac{۱}{۲} (قط لا - مس لا) = ۰$$

۵ - ثابت کرو کہ

$$\frac{نبا}{لا} = \frac{\sqrt{لا + ۱} - \sqrt{لا - ۱}}{لا}$$

۶ - ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۲} = \left\{ \frac{\sqrt{لا + ۱} + \sqrt{لا - ۱}}{لا} \right\}$$

۷ - ایک دسے دوے دائرہ کے اندرونی اور بیرونی منظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ جب 'ن' بڑا ہو تو 'ن' ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں میں فرق 'ن' ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے فرق کا  $\frac{۱}{۲}$  ہوتا ہے۔

۸ - ایک خط مستقیم 'ا' ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم 'ولا' و 'وما' پر اس کے متقاطعوں 'وا' و 'وب' کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ اگر 'ا' ب کے دو متصل عملوں کا نقطہ تقاطع 'ن' ہو اور 'ق' وہ نقطہ ہو جس پر زاویہ 'لا' و 'ما' کا نصف 'ا' ب کو قطع کرتا ہے تو 'ا' ن = 'ق' ب

۹ - دائرہ کے نقطہ 'ا' میں سے وتر 'ا' ن کھینچا گیا اور 'ا' پ کے ماس پر ایک نقطہ 'ت' اس طرح بنایا گیا کہ 'ا' ت = 'ا' ن' اگر 'ت' ن محدودہ 'ا' میں سے گزرتا ہے تو 'ت' پ کے لیے تو 'ا' ق کی انتہائی قیمت 'جب' ن' 'ا' کی طرف حرکت کرتے وقت دائرہ کے ٹیچر کا دو چند ہوتی ہے۔

۱۰۔ ایک خط مستقیم **ا ج** اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم **و لا**، **و ما** پر ایک نقطوں اور **ا ج** سے بننے والے مثلث **ا و ما** کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ **ا ج** کے دو متصل عملوں کے تقاطع کا انتہائی نقطہ **ا ج** کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

۱۱۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم **ا ج** اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم **و لا**، **و ما** پر رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر **ا ج** کے دو متصل عملوں کا انتہائی نقطہ تقاطع **ن** ہو اور **و سے ا ج** پر جو عمود کھینچا جائے اس کا پائین **ل** ہو تو **ا ن = ل ج**۔

۱۲۔ ایک دائری قوس کے سروں پر اور اس کے وسطی نقطہ پر تاس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تاسوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ آخر کار اس مثلث کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جس کے اس نقاط تاس ہوں۔

۱۳۔ اگر **ن ج ن** ایک ناقص کا کوئی ثابت قطر ہو اور **ق** **ھ** اس قطر کا کوئی سین اور اگر **ق** پر کا تاس **ج ن** محدودہ کو **ت** پر لے تو ثابت کرو کہ **ت سین** **ت ن** : **ن ھ** کی انتہائی قیمت جبکہ **ن ھ** لا انتہا چھوٹا ہو ایک ہے۔

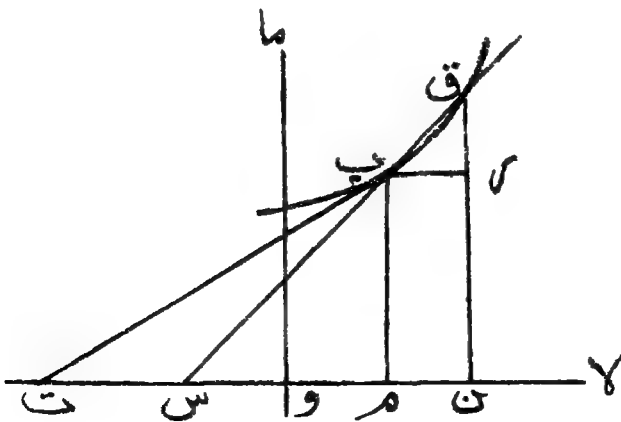


## دوسرا باب

### مشتق تفاعل

۴۵

۶۴۔ تمہید۔ ہندسی توضیحات۔ کسی منحنی کے دئے ہوئے نقطہ  
ماسی خط کی سمت دریافت کرنے کے سوال سے تفرقی احصا کی ابتدا ہوئی۔  
فرض کرو کہ چ اور ق دو متصل نقطے ایک مسلسل منحنی  $MA$  =  $FA$  (۱) ... (۲)  
پر ہیں، نیز چپ اور ق ن ان کے معین ہیں۔ چپ ہر خط  $W$  کے  
توانی ہے اور وتر چپ ق محور  $LA$  سے ملتا ہے۔



شکل ۱۹

اگر نقطہ چپ کو ثابت رکھا جائے اور ق نقطہ چپ کے قریب لایا جائے  
تو یہ وتر عام ہندسی منحنی کی صورت میں ایک خاص انتہائی مقام چپ کی  
افتیاد کر کے گا اور ہم اسے نقطہ چپ پر نامی خط کی تقریب قرار دیں گے۔ ایسا  
ممکن ہے کہ منحنی کے ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر وتر کا کوئی انتہائی مقام نہ ہو۔  
نامی خط کی سمت اس زاویے سے مائل ہوتی ہے جو چپ خط و لا سے  
بناتا ہے یعنی شکل میں زاویہ چپ سے لا کی انتہائی قیمت ہے۔  
فرض کرو کہ

۴۶ و م = لا، چپ م = ما، ون = لا + مف لا، ق ن = ما + مف ما  
تو سس چپ س لا = سس چپ م = سس م = چپ ر = ق ر = مف ما ..... (۲)

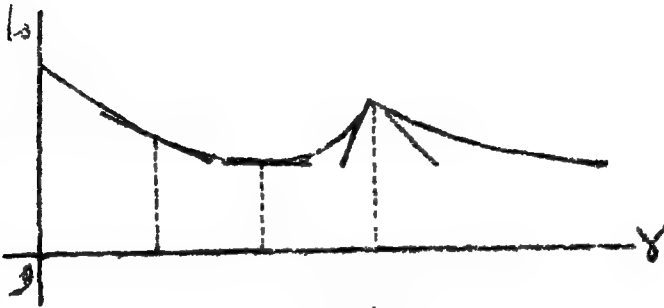
اب سوال صرف اتنا ہے کہ کسر  $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$  کی انتہائی قیمت دریافت کیجائے  
جبکہ مف لا کی انتہا صفر ہو۔ اس کی انتہائی قیمت کو

فرما ..... (۳) ' ترقیم  $\left[ \frac{dx}{dy} = \frac{\text{فرما}}{\text{فر لا}} \right]$

سے تعبیر کیا جاتا ہے، اسے ایک ہی علامت تصور کرنا چاہئے۔ کسی شکل انتہا  
مائل کرنے کے طریقے کی یاد دہانی کے لئے برقرار رکھی گئی ہے۔ یہ تحلیلاً اسی  
پیشرو کو فنا (لا) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے فنا (لا) نام شریف تعادل  
کہتے ہیں۔

علامت (۳) سے جو منحنی کی خاصیت تعبیر ہوتی ہے اس کے لئے ہندسی  
نام تجویز کرنے میں بہت سہولت ہوگی۔ اس معنی میں ہم اصطلاح "دھال"  
کام میں لائیں گے۔ اگر ہم منحنی کے کسی نقطہ پر دائیں جانب نامی خط کھینچیں تو  
دھال اس زاویہ کا مثلثی ماس ہے جو نامی خط محور لا کی مثبت سمت سے  
بناتا ہے۔ اگر یہ زاویہ منفی ہے تو دھال منفی ہوگا اور اگر نامی خط و لا کے  
متوازی ہے تو دھال صفر ہوگا۔ دیکھو شکل ۲۰

اکثر صورتوں میں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے وہ حال بھی خود لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اگرچہ ایسا ممکن ہے کہ ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر جہاں مماسی خط عمود کا پیرامون وار ہو وہ حال لا اتہا ہو جائے۔ شکل میں ایسی صورت بھی دکھائی گئی ہے جبکہ وہ حال میں محض دو مقدار کا توڑ یا عدم تسلسل ہے۔



شکل ۲۰

## ۲۵۔ مشتق تفاعل کی عام تعریف -

چونکہ مشتق تفاعل کا تخیل ریاضی کی تمام شاخوں میں نہایت اہم ہے اس لئے ہم اس کی تعریف زیادہ باقاعدہ طور پر بغیر ہندسی مثالوں کی مدد کے درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ما متبوع تغیر لا کا خاص وسعت میں ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اب اگر لا میں صف لا کا اضافہ کیا جائے جہاں لا + صف لا مذکورہ بالا وسعت میں واقع ہے اور اس کی وجہ سے ما میں صف ما کا اضافہ ہو تو لا کو ثابت مگر نسبت  $\frac{\text{صف ما}}{\text{صف لا}}$  ..... (۱) اضافہ صف لا کا تفاعل ہوگی۔

اب اگر صف لا اور اس کی وجہ سے صف ما سلسلہ وار کچھ قیمتیں اختیار کریں جنکی اتہا متغیر ہو تو اس نسبت کی قیمت ایک معین اور واحد انتہائی

مقدار کی طرف مال ہوگی۔ اس طرح حاصل شدہ قیمت کو ہم واسکا لجا ط لا کے مشتق تفاعل یا مشتق یا تفرقی سر کیٹے۔ اور اس کو علامت فرما

فرا ..... (۲) سے ظاہر کریں گے۔  
مختصر مشتق تفاعل (جب یہ وجود رکھتا ہو) اس نسبت کی انتہائی قیمت ہے جو تفاعل کے اضافہ کو متبوع سفیر کے اضافہ کے ساتھ ہے جبکہ دونوں اضافے لا انتہا چھوٹے ہو جائیں۔

اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا یا ہے کہ تعریف بالا میں ہم ایک خاص نسبت کی انتہائی قیمت کا ذکر کرتے ہیں نہ کہ مف ما اور مف لا کی انتہائی قیمتوں کی نسبت کا۔ مؤخر الذکر نسبت کی قیمت دریافت نہیں کی جاسکتی کیونکہ اس کی

شکل غیر معین  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  ہے۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ نسبت  $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$  کی واحد انتہائی قیمت ہے تو یہ سمجھنا چاہئے کہ متبوع سفیر کی دست کے اندر لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے اس نسبت کی انتہا صرف ایک ہی ہے خواہ مف لا مثبت نب سے صفر کی طرف مال ہو خواہ منفی جانب سے۔ بعض صورتوں میں انما ہوتا ہے کہ مف لا کے مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف آئے سے بہت کی انتہا مختلف ہوتی ہے۔ ایسے حالات میں مذکورہ بالا تعریف کے مطابق اگر مشتق وجود نہیں رکھتا، لیکن ان انتہائی قیمتوں کو ہم بالترتیب ”دائیں“ اور ”بائیں“ مشتق کہہ سکتے ہیں۔ دیکھو شکل ۲۰۔

اس سوال کا جواب کہ نسبت  $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$  کی کوئی معین انتہائی قیمت ہے

یا نہیں، تفاعل ما کی نوعیت پر منحصر ہے۔ جن تفاعلوں کے لئے یہ انتہا معین اور یگانہ ہو (سوائے لا کی چند اکیلی قیمتوں کے لئے) انہیں ہم ”قابل تفرق تفاعل“



کہیں گے۔ اپنی تمام تفاعل جو قابل تفرق نہیں ہیں ابھی سے علم احصا کی حدود سے باہر کر دیے گئے ہیں۔  
قابل تفرق تفاعل لازماً مسلسل ہوگا لیکن اس دعوے کا عکس صحیح نہیں ہے۔ مگر ایسے تفاعل جو مسلسل ہیں لیکن تفرق نہیں ہو سکتے وہ علم ریاضی میں بہت کم ملتے ہیں۔

مشتق تفاعل کے لئے علاوہ  $\frac{فرما}{فرلا}$  کے اور بھی بہت سی علامتیں ہم استعمال کریں گے۔ عموماً اس کو ظاہر کرنے کے لئے تفاعل کی علامت پر بڑا لگا دیا جاتا ہے پس اگر  $فرما = فرلا$ .. (۱) مشتق تفاعل کو  $فرما$  یا جیسے کہ اوپر بیان ہو چکا ہے  $فرلا$  سے تعبیر کیا جائیگا۔

$$اب چونکہ \frac{مفما}{مفلا} = \frac{فرما (لا + مفلا) - فرلا (لا)}{مفلا}$$

اس لئے  $مفلا$  کی بجائے  $فرلا$  لکھنے سے

$$فرما (لا) = نسا \frac{فرما (لا + فرلا) - فرلا (لا)}{فرلا} \dots (۲)$$

آئندہ یہ ضابطہ اکثر استعمال کیا جائیگا۔

کسی دے ہوئے تفاعل کے تفرقی سرور یافت کرنے کے عمل کو ہم "تفرق کرنا" کہیں گے۔ اگر  $لا$  متبوع متغیر ہو تو "فرما" اس عمل کی علامت تصور کیا جاسکتی ہے۔ اور اسے واحد علامت "عف" سے ظاہر کرنے میں زیادہ مہولت ہوگی۔ پس بڑا لگا کر  $فرما$  کے  $فرلا$  کے تفرقی سرور کے لئے

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرما}{فرلا} \frac{فرلا}{فرلا} \text{ اور } \frac{فرما}{فرلا} \text{ عف } فرما \text{ میں سے کوئی سی بھی علامت}$$

کام میں لائی جاسکتی ہے۔ نوٹ [عامل تفرق کا اختصار  $عف = D$ ] متبرجم۔

۲۶۔ طبیعی مثالیں۔ مختلف مضامین میں مشتق تفاعل کے استعمال کی

اہمیت اس بات پر مبنی ہے کہ اس سے اصل تفاعل کے اضافہ کی شرح کا ناپ حاصل ہوتا ہے جبکہ متبوع تغیر میں اکائی کا اضافہ ہو۔

مثلاً ہم پہلے ایک نقطہ کی خطی حرکت پر غور کریں گے۔ خط حرکت پر کسی مقررہ مبدأ سے متحرک نقطہ کا فاصلہ میں وقت کا (جو کسی مقررہ آن سے ناپا گیا ہو) تفاعل ہو گا۔ ان تغیروں میں رشتہ اکثر ”رسمیاً“ مقامات کے معنی سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں فصلہات کے متناسب ہوتا ہے اور معین میں کے۔ اگر وقت

مف ت میں فاصلہ مف میں طے ہو تو کسر  $\frac{\text{مف ت}}{\text{مف}}$  وقفہ مفات

میں ’اوسط رفتار‘ کہلاتی ہے یعنی ہر الفاظ دیگر اگر کوئی نقطہ اس مستقل رفتار سے حرکت کرے تو وہ اسی وقفہ مفات میں وہی فاصلہ مف میں طے کریگا۔ انتہا میں جبکہ مفات اور اس کی وجہ سے مف میں لا انتہا چھوئے ہو جاتے ہیں تو اس اوسط رفتار کی انتہائی قیمت کو ہم اندرونی تعریف آن ت پر مبنی رفتار کہیں گے۔ علم احصائی ترقیم میں رفتار و ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$و = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \dots \dots \dots (۱)$$

مذکور بالا ترسیمی تعبیر میں ’مقامات کے معنی کا احوال ہے۔

اب رفتار و خودت کا تفاعل ہے۔ اس رشتہ کو ظاہر کرنے والا معنی ’رفتاری معنی‘ کہلاتا ہے۔ اگر وقفہ مفات میں رفتار میں مف و کا اضافہ

ہو تو کسر  $\frac{\text{مف و}}{\text{مف ت}}$  کو اس وقفہ میں رفتار کے اضافہ کی اوسط شرح یا ’اوسط

اسراع‘ کہتے ہیں۔ اوسط اسراع کی انتہائی قیمت کو جبکہ مفات لا انتہا چھوئے ہو جاتا ہے ’آن ت‘ پر کا اسراع کہتے ہیں۔

$$\text{اگر عا اس اسراع کو ظاہر کرے تو عا} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \dots \dots \dots (۲)$$

ترسیبی تعبیر میں عمارت نقاری منحنی کا ڈھال ہے۔  
ایک استوار جسم کی صورت میں جو ایک ثابت محور کے گرد گھوم رہا ہے اگر جسم  
کسی معیاری مقام سے شروع ہو کر زاویہ طہ میں سے گھوم جائے تو اوسط  
زاوی رفتار کو وقفہ مہفت ت میں  $\frac{\text{مہفت طہ}}{\text{مہفت ت}}$  ہوگی اور اُن ت پر کی زاوی  
نقار  $\frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}}$  ..... (۳) ہوگی۔

نیز اگر مسہ اس زاوی رفتار کے لئے استعمال کریں تو وقفہ مہفت ت میں  
”اوسط زاوی اسراع“  $\frac{\text{مہفت سہ}}{\text{مہفت ت}}$  سے ظاہر ہوگا اور اُن ت پر کا زاوی  
اسراع  $\frac{\text{فرسہ}}{\text{وقت}}$  ..... (۴) سے۔

نیز کسی شے کی سلاخ کا طول تیش (طہ) کا تفاعل ہوتا ہے۔ اگر تیش طہ  
پر ایک ایسی سلاخ کا طول لا ہو جس کا طول کسی معیاری تیش (فرض کروہ سہی)  
پر اکائی ہے تو  $\frac{\text{مہفت لا}}{\text{مہفت طہ}}$  تیش کے طہ سے طہ + مہفت طہ تک جائے  
میں سلاخ کے نفی پھیلاؤ کی اوسط قدر ہے اور  $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرطہ}}$  تیش طہ پر پھیلاؤ

کی قدر یا مسر ہے۔  
بطور دوسری مثال کے فرض کرو کہ ایک مانع ہے جو آزادانہ سلسلہ وار چند  
ایسی شیطیں اختیار کر سکتا ہے کہ دباؤ (د) اکائی کمیت کے حجم (ح) کا ایک  
معیار تفاعل ہے۔

اگر حجم ح سے ح + مہفت ح ہو جائے تو کسر  $\frac{\text{مہفت ح}}{\text{ح}}$  اس نسبت کا  
ناپ ہے جو حجم کی کمی کو اصل حجم کے ساتھ ہے اور اس لئے اسے ہم ”پیکاؤ“ کہتے ہیں

یہ پچکاؤ پیدا کرنے کے لئے دباؤ کے اضافہ مف د کو پچکاؤ کے ساتھ نسبت  
 $\frac{ح\text{ مف د}}{\text{مف ح}}$  ہوگی اس نسبت کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ح لا اتہا چھوٹا  
 کر دیا جاتا ہے یعنی  $\frac{ح\text{ فرد}}{\text{فرح}}$  کو دئے ہوئے حالات کے ماتحت یہاں  
 کی 'جی' چک کہتے ہیں۔

۲۷۔ تفرقات - ابتدائی اصولوں سے۔

دئے ہوئے تخلیقی تفاعلوں کے شقوق نکالنے کے عام قواعد دریافت  
 کرنے سے پہلے ہم چند مثالوں پر ابتدائی اصولوں کی بنا پر غور کریں گے۔  
 مثال ۱۔ اگر ما = لا تو مف ما = مف لا اور اس لئے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۱ \text{ پس } \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۱$$

مثال ۲۔ ما = لا ..... (۱)  
 $\frac{\text{مف لا کی بجائے ہ کئے سے مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{(\text{لا} + \text{ہ}) - (\text{لا})}{\text{ہ}} = \frac{\text{ہ}}{\text{ہ}}$   
 انتہائی سے جبکہ ہ = ۰ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲ \text{ ..... (۲)}$$

مثال ۳۔ فرض کر دو کہ ما =  $\frac{۱}{۲}$  ..... (۳)

$$\text{پس } \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\text{لا} + \text{ہ}} - \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{\text{ہ}}{(\text{لا} + \text{ہ}) \text{ لا}}$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = - \frac{۱}{(\text{لا} + \text{ہ}) \text{ لا}}$$

اور فرما = نسا =  $\frac{1}{(لا + لا + لا)} = \frac{1}{(لا)}$  ..... (۴)  
 منفی علامت کی وجہ یہ ہے کہ جب 'لا' بڑھتا ہے تو ما گھٹتا ہے۔  
 مثال ۴ :- اگر ما = لا ..... (۵)

$$\frac{ما}{لا + لا + لا} = لا - لا + لا = لا$$

$$\frac{1}{لا + لا + لا} = \frac{ما}{لا}$$

اس لئے انتہا میں جب 'لا' ہو۔

فرما =  $\frac{1}{لا}$  ..... (۶)  
 معیاری تفاعلوں کا تفرق -

(آ) اگر ما = لا<sup>۱</sup> ..... (۱)  
 تو  $\frac{ما}{لا} = \frac{(لا + ما + لا) - (لا + لا + لا)}{لا} = \frac{لا - لا}{لا} = ۰$   
 دفعہ ۲۲ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ 'م' کی تمام منطق قیمتوں کے لئے  
 'ما' کی صورت میں اس کسے کی انتہا 'لا' ہے۔

پس فرما =  $\frac{ما}{لا}$  ..... (۲)

مثال :- اگر م = ۲ تو فرما =  $\frac{۲}{لا}$

اور اگر م =  $\frac{۱}{۲}$  تو فرما =  $\frac{۱}{۲ لا}$  دیکھو دفعہ ۲۴

(۲) اگر ما = جب لا ..... (۳)

تو مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جب (لا+ھ) - جب لا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{ھ}} \times \frac{\text{جب (لا+ھ)}}{\text{ھ}} = \text{جم (لا+ھ)}$$

اگر ناوے تو سی پیمانہ میں ناپے گئے ہوں تو دفعہ ۲۲ (۴) سے

$$\text{نسب} = \left[ \frac{\text{جب (لا+ھ)}}{\text{ھ}} \right] = ۱$$

اور دوسرے جزو ضروری کی انتہائی قیمت جم لا ہے۔

$$\text{اس لئے} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا} \dots \dots \dots (۴)$$

طالب علم شکی (۱۴) صفحہ (۲۲) میں جب لا کی ترسیم پر غور کرنا چاہئے اور اس امر کی تصدیق کرنی چاہئے کہ نسخہ کا وہ حال اس ضابطہ کے مطابق بدلتا ہے۔

$$(۴) \dots \dots \dots \text{اگر ما} = \text{جم لا} \dots \dots \dots (۵)$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم (لا+ھ) - جم لا}}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{جب لا}}{\text{ھ}} \times \frac{\text{جب (لا+ھ)}}{\text{ھ}} = \text{جم (لا+ھ)}$$

مذکور بالا اسی وجہ بنا پر اس کی انتہائی قیمت ہے

$$(۶) \dots \dots \dots \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جب لا} \dots \dots \dots$$

$$(۴) \dots \dots \dots \text{اگر ما} = \text{س لا} \dots \dots \dots (۷)$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{س (لا+ھ) - س لا}}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{جب (لا+ھ) - جم لا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{جم لا}}{\text{ھ}}$$

$$\frac{1}{\text{جم لا جم (لا+ھ)}} \times \frac{\text{جب ھ}}{\text{ھ}} =$$

اور انتہائیں

$$\text{فرما} = \frac{1}{\text{جم لا}} = \text{قط لا} \dots \dots \dots (۸)$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ  $\text{ما} = \text{س لا}$  کے معنی کا وہ حال نقاط عدم تسلسل کے درمیان ہمیشہ مثبت ہے۔ دیکھو شکل (۱۵) صفحہ (۲۲)۔

۲۹۔ سادہ قسم کے جملوں کو تفریق کرنے کے ضابطے۔ حاصل جمع کا تفریق۔

$$(۱) \dots \dots \dots \text{ج} + \text{ع} = \text{ما} \dots \dots \dots \text{فرز کردہ}$$

جہاں  $\text{ع}$  متغیر  $\text{لا}$  کا سطورہ تفاعل ہے اور  $\text{ج}$  مستقل ہے۔

$$\text{پس} \quad \text{ما} + \text{مف} = \text{ما} + \text{ع} + \text{مف} + \text{ج}$$

$$\text{مف} = \text{مف}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{مف} \text{ ما}}{\text{مف} \text{ لا}} = \frac{\text{مف} \text{ ع}}{\text{مف} \text{ لا}}$$

$$(۲) \dots \dots \dots \text{فرما} = \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} \dots \dots \dots \text{اور اس لئے انتہائیں}$$

اگرچہ یہ بالکل ظاہر ہے کہ تفریق کرنے میں جمع کیا ہوا مستقل غائب ہو جاتا ہے تاہم یہ امر نہایت ضروری ہے۔ اس کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ کسی معنی کو کلیتاً مائلو کے متوازی ہٹا دینے سے وہ حال میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

$$(۲) \dots \dots \dots \text{اگر} \quad \text{ما} = \text{ع} + \text{و} \dots \dots \dots$$

جہاں  $\text{ع}$  اور  $\text{و}$  متغیر  $\text{لا}$  کے دئے ہوئے تفاعل ہیں تو وضعہ کے مطابق

$$\text{مف} \text{ ما} = \text{مف} \text{ ع} + \text{مف} \text{ و}$$

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{مف} \text{ ما}}{\text{مف} \text{ لا}} = \frac{\text{مف} \text{ ع}}{\text{مف} \text{ لا}} + \frac{\text{مف} \text{ و}}{\text{مف} \text{ لا}}$$

چونکہ ایک مجموعہ کی انتہائی قوت علیحدہ علیحدہ رقموں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

اس لئے 
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots (۴)$$

نیز اگر  $\text{ما} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط}$  ..... (۵)  
تو اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + (\text{ع} + \text{و}) \frac{\text{فرطما}}{\text{فرلا}}$$

..... (۶) 
$$\frac{\text{فرطما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ع}}{\text{فرلا}} =$$

اس طریقہ پر کے بعد دیگرے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تفاعلوں کی کسی محدود تعداد کے مجموعہ کا مشتق ان تفاعلوں کے جداگانہ مشتقات کا مجموعہ ہے۔

مثال :-  $\text{ج} = \text{لا} + \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \dots\dots\dots + \text{م} + \text{ل} + \text{م}$

کاشتق تفاعل  $\text{م} = \text{و} + \text{لا} + (\text{م} - \text{و}) + \text{لا} + \dots\dots\dots + \text{م} - \text{و} + \text{م} - \text{و}$

۱۳

۳۰۔ حاصل ضرب کا مشتق :-

(۱) 
$$\text{ج} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \dots\dots\dots$$

جہاں  $\text{ج}$  مستقل ہے اور  $\text{ع}$  تغیر کا تفاعل ہے،  
تو  $\text{م} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \dots\dots\dots$

اس لئے 
$$\text{م} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \dots\dots\dots$$

اور 
$$\frac{\text{م}}{\text{ج}} = \frac{\text{ع}}{\text{ج}} + \frac{\text{و}}{\text{ج}} + \frac{\text{ط}}{\text{ج}} + \dots\dots\dots$$

اس لئے آجائیں 
$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots (۲)$$



پس مستقل جزو ضربی تفرق کرنے کے بعد بھی قائم رہنا ہے۔  
اس امر کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اگر کسی غنی کے معین ایک خاص نسبت  
میں تبدیل کئے جائیں تو وہ حال بھی اسی نسبت سے بدل جاتا ہے۔ (شکل ۲ صفحہ ۱۱۹)

(۴) اگر ما = ع و ..... (۳)  
جہاں ع اور و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۲ کے مطابق  
مف = ما = (ع + مف) (و + مف) = ع و  
= و مف + ع مف + و مف + ع مف و

اور اس لئے مف =  $\frac{ما}{و}$  =  $\frac{ع + مف}{و}$  +  $\frac{ع + مف}{و}$  مف  
مف لا

اور اس کی انتہا لینے سے اس اصول کے مد نظر کہ حاصل ضرب کی انتہا علامہ علامہ  
انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ہیں ذیل کا ضابطہ حاصل ہوا ہے

فرما = و فرع + ع فرلا ..... (۴)  
فرلا  
اگر مساوات کے دونوں جانب ما = ع و سے تقسیم کئے جائیں

تو  $\frac{1}{ما} = \frac{1}{و} + \frac{1}{ع} \frac{1}{فرلا}$   
اس نتیجہ کی آسانی سے توسیع کی جاسکتی ہے۔ پس اگر ما = ع و ط  
تو ہی = ع و ٹھنے سے ما = ہی ط

اس لئے اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{ما} = \frac{1}{فرلا} = \frac{1}{و} + \frac{1}{ع} \frac{1}{فرلا} + \frac{1}{ط} \frac{1}{فرلا}$$

$$= \frac{1}{ع} \frac{1}{فرلا} + \frac{1}{و} \frac{1}{فرلا} + \frac{1}{ط} \frac{1}{فرلا} + \frac{1}{ظ} \frac{1}{فرلا} \dots (۵)$$

اور اسی طرح اجزاء کی کسی محدود تعداد کے لئے اگر ہم آخر الذکر ضابطہ کی عام

شکل کے دونوں جانب ما = ع و ط ..... سے ضرب دیں تو ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و ط} \times \dots \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{ع ط} \times \dots \times \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ع و} \times \dots \times \frac{\text{فط}}{\text{فرلا}} \dots (۶)$$

الفاظ میں اسے اس طرح بیان کر سکتے ہیں: مختلف اجزاء میں سے ہر ایک کو باقی باری تفریق کر اور باقی اجزاء کو مستقل مان کر لا کے لحاظ سے مشتق نکالو تو حاصل ضرب کا مشتق تفاعل ان جداگانہ دریافت کئے ہوئے مشتقوں کا مجموعہ ہوگا۔

مثال ۱:- اگر ما = ع × ع × ع × ... م اجزاء تک = ج ..... (۷)

$$\text{تو } \frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \dots + \frac{1}{\text{م}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$= \frac{۴}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م} \times \text{ع}^{۴-۲} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \dots (۸)$$

اس نتیجہ کا عام ثبوت جس میں م کے مثبت صحیح عدد ہونے کی قید نہیں ہے دفعہ ۲۲ میں دیا جائیگا۔

مثال ۲:- اگر ما = جب لا جم لا ..... (۹)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} (\text{جب لا}) + \text{جب لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} (\text{جم لا})$$

$$= \text{جم لا} \times \text{جم لا} - \text{جب لا} \times \text{جب لا}$$

$$= \text{جم لا} - \text{جب لا} = \text{جم لا} \dots (۱۰)$$

مثال ۳:- اگر ما = لا جب لا ..... (۱۱)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} (\text{جب لا}) + \text{جب لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} (\text{لا})$$

$$= \text{لا} \times \text{جم لا} + \text{لا جب لا} \dots (۱۲)$$

۳۔ خارج قسمت کا تفرق۔

(۱) فرض کرو کہ  $\frac{م}{و} = \frac{م}{و}$  -----

جہاں ع اور د منفیر لاکے معا و مرتبہ لاکے یوں ہے۔ مفعول کے مطابق

$$\frac{مف م}{مف و} = \frac{مف م}{مف و} = \frac{مف م}{مف و}$$

$$\frac{مف م}{مف و} = \frac{مف م}{مف و} = \frac{مف م}{مف و}$$

اور انتہا میں  $\frac{م}{و} = \frac{م}{و}$  ----- (۲)

اسے الفاظ میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ اگر کسی خارج قسمت کا مشتق نکالنا ہو تو نسب نما اور شمار کنندہ کے مشتق کے جنس ضرب میں سے شمار کنندہ اور نسبت مشتق کا حاصل ضرب تفریق کرو اور اس حاصل تفریق کے نسب نما کے مربع سے تقسیم کرو۔

خاص شکل  $\frac{م}{و} = \frac{م}{و}$  ----- (۳)

خاص غور کے قابل ہے۔

اس صورت میں  $\frac{مف م}{مف و} = \frac{م}{و} = \frac{م}{و}$

$$\frac{مف م}{مف و} = \frac{م}{و} = \frac{م}{و}$$

(۴)  $\frac{م}{و} = \frac{م}{و} = \frac{م}{و}$  -----

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام مسئلہ (۲) میں  $ع = ۱$  اور  $\frac{م}{و} = \frac{م}{و}$  رکھنے سے حاصل ہو سکتا تھا۔

مثال ۱:-  $\frac{1 + 2x + x^2}{x^2 + 2x - 1} = م + \dots$  (۵)

یہاں  $\frac{فرع}{فرع} = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x - 1}$  اور  $\frac{فرو}{فرع} = \frac{-1}{x^2 + 2x - 1}$

پس  $\frac{(1 + 2x + x^2)(x^2 + 2x - 1) + (-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 2x - 1)^2} = \frac{فرع}{فرع}$

(۶)  $\dots \dots \dots \frac{(x^2 - 1) \cdot 2}{(x^2 + 2x - 1)^2} =$

مثال ۲:- اگر  $\frac{1}{x^3} = م + \dots$  (۷)

جہاں م مثبت صحیح عدد ہے تو

$\frac{فرع}{فرع} = \frac{1}{x^3} = م \times \frac{1}{x^3} + م \times \frac{فرع}{فرع} = م \times \frac{1}{x^3} + م \times \frac{فرع}{فرع} \dots$  (۸)

دیکھو دفعہ ۳۲

اس دفعہ کا ضابطہ دفعہ ۳۰ (۲) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر  $\frac{ع}{و} = م + \dots$

اس لئے  $\frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} = \frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} + \frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} \dots$  (۹)

پس  $\frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} = \frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} + \frac{1}{و} \times \frac{فرع}{فرع} \dots$  (۱۰)

یہ مذکورہ بالا ضابطہ (۲) کے معادل ہے۔

ذیل کی مثالیں ضروری ہیں۔

(آ) اگر  $م = س لا = جب لا$  (۱۱)

$$\text{تر فرما} = \frac{\text{جم لا فرلا} (\text{جب لا}) - \text{جب لا فرلا} (\text{جم لا})}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۲) \dots\dots\dots \text{جم لا} + \text{جب لا} = \frac{\text{جم لا}}{\text{جم لا}} = \text{قط لا}$$

نتیجہ دفعہ ۱۸ (۱۲) کے مطابق ہے۔

$$(۱۳) \dots\dots\dots \text{اے طرح اگر ما} = \text{م لا}$$

$$(۱۴) \dots\dots\dots \text{تو ہم حاصل کر سکتے ہیں} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{قم لا}$$

$$(۱۵) \dots\dots\dots \text{اگر ما} = \text{قط لا} = \frac{۱}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots \text{تر فرما} = \frac{۱}{\text{جم لا فرلا}} (\text{جم لا}) = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۷) \dots\dots\dots \text{اور اسی طرح اگر ما} = \text{قم لا}$$

$$(۱۸) \dots\dots\dots \text{تر فرما} = \frac{\text{جم لا}}{\text{جب لا}}$$

جیسا کہ دفعہ ۱۵ میں بتایا گیا ہے اگر ہم لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے عمل کو علامت عف سے ظاہر کریں تو دفعات ۱۹ تا ۲۱ کے نتائج مختصر ذیل کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں۔

$$(۱۹) \dots\dots\dots \text{عف (ع+و)} = \text{عف+ع} + \text{عف+و}$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots \text{عف (ع+و)} = \text{و عف+ع} + \text{و عف+و}$$

$$(۲۱) \dots\dots\dots \text{عف (ع+و)} = \frac{\text{و عف+ع} - \text{و عف+و}}{\text{و}}$$

۳۲۔ تفاعل کے تفاعل کا تفرق۔

$$(۱) \dots\dots\dots \text{اگر ما} = \text{فا (ع)}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{جہاں ع} = \text{ف (لا)}$$

اور علامتیں فا اور ف مطلوبہ تفاعلوں کو ظاہر کرتی ہیں تو ثابت رہا ہے کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فا} (ع) \times \text{ف} (لا) \dots (۳)$$

اگر مفا لا، مفا ما، مفا ع ایک ساتھ کے اخلاف ہوں تو مثلاً

$$\frac{\text{مفا ما}}{\text{مفا لا}} = \frac{\text{مفا ما}}{\text{مفا ع}} \times \frac{\text{مفا ع}}{\text{مفا لا}}$$

اور چونکہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

ضابطہ (۳) کا مفید استعمال خطی حرکت کے نظریہ میں ہوتا ہے۔  
اگر ہم دفعہ ۲۶ کے مطابق کسی متحرک نقطہ کی رفتار اور اس کے ترتیب وار  
سے تعبیر کریں تو

$$و = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \text{ اور } ع = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \dots (۴)$$

اب اگر دائرے شدہ فاصلہ میں کاتفاعل سمجھا جائے تو

$$ع = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = و \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \dots (۵)$$

اسی طرح ایک محور کے گرد گھومنے والے استوار جسم کی صورت میں زاوی اسراع  
ذیل کے جملہ سے لیا جائے کہ زاوی رفتار کو طے کاتفاعل مان لیا جائے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرتہ}} \times \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ینی مسہ} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرتہ}} \dots (۶)$$

ضابطہ (۳) سے ذیل کے اہم نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$(۱) \quad \text{اگر } ما = \text{فا} (لا + د) \dots (۷)$$

$$\text{توسلہ (۳) میں } ع = لا + د \text{ اور } \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = ۱ \text{ رکھتے سے}$$

$$\text{فرما} = \frac{\text{فأ} (لا + لا)}{\text{فرلا}} \dots \dots \dots (۸)$$

حاصل ہوتا ہے۔  
اس کی ہندی تعبیر یہ ہے کہ سختی کو کلیتہً لا نور کے متوازی ہٹا دینے سے دُحال  
میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

$$\text{اگر ما} = \text{فأ} (گ لا) \dots \dots \dots (۹)$$

تو رکھو ع = گ لا پس فرع = گ اور

$$\text{فرما} = \frac{\text{گ فأ} (گ لا)}{\text{فرلا}} \dots \dots \dots (۱۰)$$

حاصل ہوتا ہے۔  
(۳) اگر ما = عا ..... (۱۱) جہاں م کوئی منطق مقدار ہے  
تو فأ (ع) = عا اور فأ (ع) = م عا<sup>۱</sup>

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م عا}^۱ = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \dots \dots \dots (۱۲)$$

خاص صورتوں میں جبکہ م =  $\frac{۱}{۲}$  اور م =  $\frac{۱}{۳}$  تو بالترتیب حاصل ہوتا ہے

$$(۱۳) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{فرلا} \text{ ما} = \frac{۱}{۲} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \\ \frac{\text{فرلا} \text{ ما} = \frac{۱}{۳} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \end{array} \right.$$

اب اوپر کے نصابوں پر چند مثالیں دی جائیگی۔

$$\text{مثال (۱۴)} \dots \dots \dots \text{اگر ما} = \text{جب لا} \dots \dots \dots$$

یعنی ما = عا جہاں ع = جب لا

$$\text{تو عفا} = \text{م عا}^۱ = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{م جب لا} \dots \dots \dots (۱۵)$$

مثال (۱۲) - اگر  $\sqrt{a^2 - b^2} = c$  ..... (۱۲)

تو  $c^2 = a^2 - b^2$  ..... (۱۳)

$$(۱۴) \dots\dots\dots \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} =$$

مثال (۱۳) - اگر  $\sqrt{\frac{a}{a^2 - b^2}} = c$  ..... (۱۴)

اس میں  $c = \sqrt{a}$  اور  $\sqrt{a^2 - b^2} = c$  رکھیں تو اس سے پہلی مثال کی بنا پر  
 $c^2 = a$  اور  $c^2 = a^2 - b^2$  حاصل ہوتے ہیں۔

اب کسر کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - b^2} = \frac{c^2 + c^2}{a^2 - b^2}$$

$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} =$$

۲۹

۳۳۔ مقلوب تفاعلوں کا تفرق -

اگر ما متغیر  $a$  کا مسلسل تفاعل  $\Delta a$  ہو تو چند شرائط کے ماتحت (دیکھو دفعہ ۱۶)  
 جو عموماً علم ریاضی کے عام تفاعلوں کی صورت میں پوری ہوتی ہیں  $\Delta a$  متغیر  
 کا مسلسل تفاعل ہوگا۔

اگر  $\Delta a$  اور  $\Delta a^2$  کے متغیر  $\Delta a$  نے  $\Delta a^2$  مف  $\Delta a$  مف  $\Delta a$  ہوں تو مثلاً

$$\frac{\Delta a^2}{\Delta a} = \Delta a$$

پس چونکہ حاصل ضرب کی انتہا ان اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب سے  
 سادی ہے



اس لئے 
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1 \dots \dots \dots (۱)$$

پس اگر یہ پہلے فرض کر لیا جائے کہ ما بلحاظ لا کے قابل تفرق تفاعل ہے تو نتیجہ نکلتا ہے کہ عموماً لا متغیر ما کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ اور یہ دونوں مشتق تفاعل ایک دوسرے کے متضاد کافی ہونگے۔ اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ منحنی کا ما میں لا اور ما محوروں سے منجم زاویے بنا کر ہے۔  
ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

(۱) اگر ما = جب لا  $\dots \dots \dots (۲)$

تو لا = جب ما اور  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جہ ما}$

پس 
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جہ ما} = \frac{1}{\text{جہ ما}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{لا} - 1}} \dots \dots \dots (۳)$$

(۲) اگر ما = جہ لا  $\dots \dots \dots (۴)$

تو لا = جہ ما اور  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جب ما}$

اور اس لئے 
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جب ما} = \frac{1}{\text{جب ما}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{لا} - 1}} \dots \dots \dots (۵)$$

ان نتیجوں میں مبہم علامت کے لئے ذیل کی وجہ دی جا سکتی ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ اگر ما = جب لا تو ما متغیر لا کا کثیر القیمت تفاعل ہے یعنی لا کے درمیان لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی قیمتوں کا

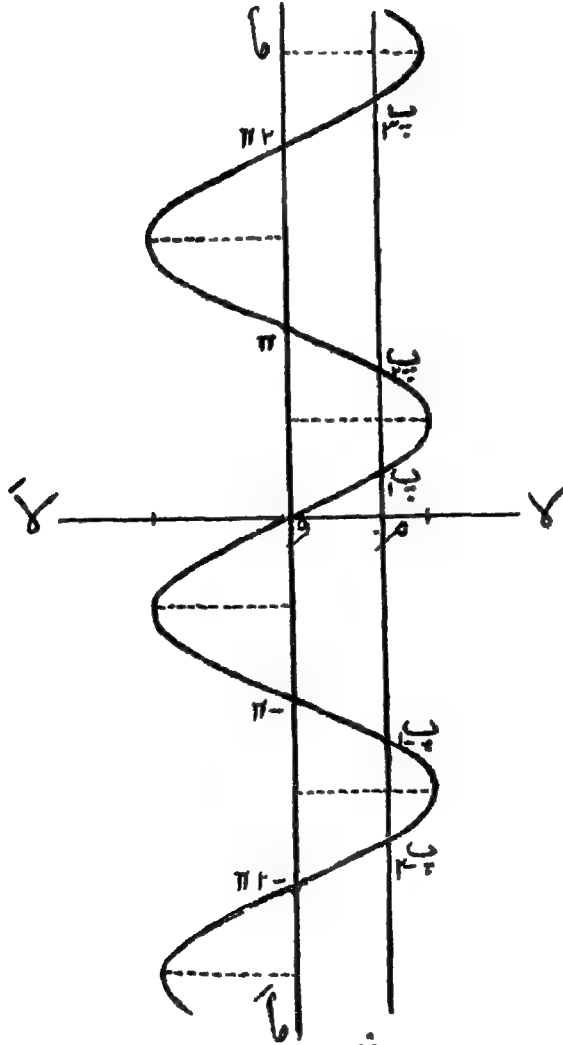
ایک سلسلہ ہوتا ہے۔ ان میں سے بعض قیمتوں کے لئے فرما

مثبت ہے اور بعض کے لئے منفی ہے۔ دیکھو شکل ۲۱ صفحہ (۸۶) انہی اسوایط جہ لا کے لئے۔

مردوبہ تباداد کے مطابق اگر ہم جب لا سے وہ زاویہ سمجھیں جو

$\frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{\pi}{4}$  کے درمیان واقع ہے اور جبکہ جیب لہ کے مساوی ہے تو

$$\frac{\pi}{4} \text{ (جیب لہ)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \dots\dots\dots (۶)$$



شکل ۲۱





$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{1}{2\text{ع} + 1} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

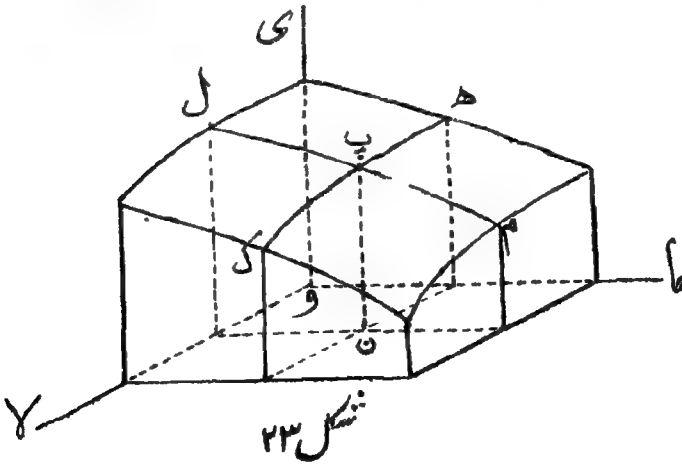
$$\text{نیز } 1 + 2 = \frac{(2\text{ع} + 1) + (2\text{ع} + 1)}{(2\text{ع} + 1) + (2\text{ع} + 1)} = \frac{2\text{ع} + 1}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{1 - 2\text{ع}}{2\text{ع} + 1} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad (۱۲)$$

### ۳۴۔ دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل۔ جزوی مشتق

اگر یہ اس کتاب کا اصل مقصد صرف ایک متبوع متغیر کے تفاعلوں پر غور کرنا ہے لیکن ابتدائی سے زیادہ عام نظریہ کے خیالات اور ترقیم سے واقف ہونا بعض اوقات مفید ثابت ہو گا۔

کوئی مقدار جو دو یا زیادہ متبوع متغیروں (لا، ما، ...) کا تفاعل اس وقت کہلاتی ہے جبکہ وہ خالذ کی قیمتوں کے حساب سے جو اختیاری اور ایک دوسرے سے بے تعلق ہو سکتی ہیں تین متغیر کا وجود ہو۔ یہ ضروری ہے کہ ہر صورت میں متبوع متغیروں کی قیمتیں انکی جدا گانہ حد کے اندر لی جائیں پس اگر ایک دی ہوئی سطح پر کوئی نقطہ پ ہو اور پ ن کسی ثابت اٹھی ستوی پر نمود ہو تو بلندی پ ن کے محدد (لا، ما) کا تفاعل ہے۔



اسی طرح طبیعیات میں گیس کا درجہ دو متبوع متغیروں حجم (فی) اکائی کیست اور  
پیش کا تفاعل ہے۔ تفاعلی رشتہ شکل ذیل کی مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

۱) 
$$P = f(V, T) \quad (1)$$
  
مذکورہ بالا سطح کی خاص صورت میں اگر ہم بلندی چپ ن کوئی سے ظاہر کریں تو  
یہی 
$$P = f(V, T) \quad (2)$$

تسلسل کی تعریف کو (جو دو متبوع میں دی گئی ہے) موجودہ صورت میں اس  
طرح توسیع دیا جاسکتی ہے۔ تفاعل 
$$P = f(V, T) \quad (3)$$
  
۲) کی قیمتوں کے خاص جٹ کے لئے مسلسل کہلا چکا اگر کسی  
دی ہوئی مقدار (جو کتنی ہی چھوٹی ہو) کے جواب میں (مقدار مختلف)  
ایک مقدار صہ ایسی دریافت ہو سکتی ہے کہ انما فول

مف 
$$P = f(V, T) \quad (4)$$
  
۳) مف 
$$P = f(V, T) \quad (5)$$
  
کی مطلق قیمت شمار سے کم ہو۔

۶۴۱ پس دو متبوع متغیروں کی خاص صورت میں (جس کو شکل میں دکھایا گیا  
ہے) شرط تسلسل کا مفہوم یہ ہے کہ مستوی (۱) میں ن کے گروہ کی تسلسل ایسا کہنچا  
جاسکتا ہے کہ اس مستطیل کے اندر کے تمام نقطوں کے مقینوں کا فرق  
چپ ن سے شمار کی نسبت کم ہو جہاں شمار کتنی ہی چھوٹی مقدار ہو سکتی ہے

اب فرض کرو کہ تفاعل 
$$P = f(V, T) \quad (6)$$
  
سلسل ہے اور تمام متبوع متغیر سوائے (۱) کے مستقل رکھے جاتے ہیں  
تب یہ فرض کر کے کہ 
$$P = f(V, T) \quad (7)$$

بلحاظ (۱) کے 
$$P = f(V, T) \quad (8)$$
  
سے تعبیر کریں گے۔

نوٹ:- علامت "جف" جزوی تفرق کا اختصار ہے 
$$Jf = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (9)$$
  
جف 
$$Jf = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (10)$$

پس جف ۶ = نہا۔ فہ (لا + مفلا 'ما'...)۔ فہ (لا 'ما'...)۔ (۴)

اسی طرح جف ۶ = نہا۔ فہ (لا + مفلا 'ما'...)۔ فہ (لا 'ما'...)۔ (۵)

سطح (۶) کی صورت میں نظر ہے کہ اگر سنج کو چپا میں سے مستوی سے نکالا اور سے و ما کے متوازی مستویوں سے کاٹا جائے تو جف ہی اور جف ہوگا

بالترتیب ان تراشوں کے دھال ہیں۔ شکل میں یہ تراشیں ہگ اور م ہیں

مثال ۱۔ اگر مہن = لا 'ما'..... (۶)

تو جف ہی = م لا 'ما' اور جف ہی = ن لا 'ما'..... (۷)

مثال ۲۔ اگر یہ فرض کر لیں کہ گیس کے دباؤ (د) 'جم (ح) 'امیش (طہ) ہیں

ذیل کا رشتہ ہے

$$د = \frac{ح طہ}{ح} \dots\dots\dots (۸)$$

$$تو جف د = \frac{ح طہ}{ح} اور جف د = \frac{ح}{ح} \dots\dots\dots (۹)$$

۳۵۔ تفصیلی تفاعل۔

فہ (لا 'ما') = ..... (۱)

کے نمونہ کی مساوات عموماً ما کو لا کے تفاعل کی شکل میں بیان کرتی ہے۔ کیونکہ اگر ہم لا کو کوئی قیمت دیں تو ما میں حاصل شدہ مساوات کی ایک یا زیادہ معین اصلیں ہوں گی۔ یہ اصلیں حقیقی یا خیالی ہو سکتی ہیں لیکن ہم صرف ان صورتوں پر غور کریں گے جنہیں خاص حدود کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے ما کی (کم از کم) ایک حقیقی اصل وجود رکھتی ہو۔ اصطلاح تفصیلی تفاعل





دفعہ ۳۴ کی ترقیم کے مطابق یہ شکل ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۶) \dots\dots\dots = \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فدا}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

$$(۷) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \frac{\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف فدا}}{\text{جف ما}}}$$

چوتھے باب میں ثابت کیا جائیگا کہ نتائج (۶) اور (۷) تفاعل فدا (لا، ما) کی اس خاص صورت تک ہی محدود نہیں ہیں۔ تاہم یہ خاص صورت اکثر سندی اطلاعات سے لے کافی ہے۔

### امشہ

(تفرق ابتدائی اصولوں سے)  
ابتدائی اصولوں سے سوالات آتاہ کے تفاعلوں کے شق دریافت کرو۔

$$-۱ \quad \frac{۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱}$$

$$-۲ \quad \frac{۱}{۱-۱} \quad ، \quad \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱+۱}$$

$$-۳ \quad \frac{۱}{۱+۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱+۱}$$

$$-۴ \quad \text{صم لا} \quad ، \quad \text{قلا لا} \quad ، \quad \text{قم لا}$$

$$-۵ \quad \text{جب لا} \quad ، \quad \text{جم لا} \quad ، \quad \text{جب لا} \quad ، \quad \text{جب لا}$$

$$-۶ \quad \text{اگر کسی نقطہ کی خطی حرکت کا ضابطہ}$$

س = عت + عت ہو جہاں ع اور ع مستقل ہیں تو  
ثابت کرو کہ وقت پر رفتار ع + عت ہے اور سراع مستقل ہے۔

- ۷۔ مستقل تیش والی ایک گیس کے دباؤ اور حجم میں رشتہ  $d \propto \frac{1}{P}$  مستقل ہے ثابت کرو کہ کبھی ٹیگ  $d$  کے مساوی ہے۔
- ۸۔ اگر کسی دائرہ کا نصف قطر ایک فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہو تو رقبہ کی شرح اضافہ مربع فٹ فی ثانیہ اس میں دریافت کرو جبکہ نصف قطر افٹ ہے۔
- ۹۔ اگر کسی دائرہ کا رقبہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہو تو ثابت کرو کہ محیط کے اضافہ کی شرح نصف قطر کی معکوس نسبت سے ہوتی ہے۔
- ۱۰۔ مرکزہ اور نصف قطر ایک فٹ والے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ہے ایک نقطہ جب نقطہ  $A$  سے شروع ہو کر یکساں رفتار سے ایک ثانیہ میں محیط کا چکر لگاتا ہے ذیل کی صورتوں میں اضافہ کی شرح دریافت کرو (۱) قوس  $ABC$  (۲) وتر  $AC$  (۳) قطاعی رقبہ  $ABC$  (۴) مثلثی رقبہ  $ABC$  اس میں جبکہ زاویہ  $A$   $60^\circ$  ہے۔

- ۱۱۔ اگر ایک گرام پانی کا حجم ایسے بدلتا ہو جیسے  $1 + \frac{(t-1)^2}{12 \dots}$  جہاں  $t$  مئی پیش ہے تو جی پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جبکہ  $t = 20$  اور  $t = 0$ ۔

## امثلہ ۶

(احاصل ضرب اور خارج قسمت)

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| ۱۔ $Ma = (1 - a)$          | عف $Ma = 1 - a$             |
| ۲۔ $Ma = (1 - a)^2$        | عف $Ma = (1 - a)(1 - a)$    |
| ۳۔ $Ma = (1 - a)^3$        | عف $Ma = (1 - a)^2(1 - a)$  |
| ۴۔ $Ma = (1 - a)(1 - a^2)$ | عف $Ma = (1 - a)^2 + 1 - a$ |
| ۵۔ $Ma = (1 - a)(1 + a)$   | عف $Ma = (1 - a)(1 + a)$    |
| ۶۔ $Ma = (1 - a)(1 + a^2)$ | عف $Ma = (1 - a)(1 + a^2)$  |

$$۷-۷ = م = (۱ + \frac{1}{۷})^۲$$

$$۸-۸ = م = \frac{۱}{۷-۱}$$

$$۹-۹ = م = \frac{۱}{۱+۷}$$

$$۱۰-۱۰ = م = \frac{۱+۷}{۷-۱}$$

$$۱۱-۱۱ = م = \frac{۷}{(۷-۱)^۲}$$

$$۱۲-۱۲ = م = لا \text{ جب } لا$$

$$۱۳-۱۳ = م = لا^۲ \text{ جب } لا$$

$$۱۴-۱۴ = م = جب لا \text{ جب } لا$$

$$۱۵-۱۵ = م = \frac{جب لا}{لا}$$

$$۱۶-۱۶ = م = \frac{لا}{جب لا}$$

$$۱۷-۱۷ = م = \frac{س لا}{لا}$$

$$۱۸-۱۸ = م = س لا^۲$$

$$۱۹-۱۹ = م = لا^۲ \text{ قط } لا$$

$$۲۰-۲۰ = م = \frac{جب لا}{لا \text{ س لا}}$$

$$۲۱-۲۱ = م = \frac{۱+جب لا}{۱-جب لا}$$

$$عف م = ۲(۱ + \frac{1}{۷})(\frac{1}{۷} - ۱)$$

$$عف م = \frac{۱}{۲(۷-۱)}$$

$$عف م = \frac{۲-۱}{۲(۷+۱)}$$

$$عف م = \frac{۲ لا}{۲(۷-۱)}$$

$$عف م = \frac{لا^{۱۰۲}}{(۷-۱)^۱۰۲} \{م-م-ن(ن-لا)\}$$

$$عف م = جب لا + لا \text{ جم } لا$$

$$عف م = ۲ لا \text{ جم } لا - لا \text{ جب } لا$$

$$عف م = ۲ جب لا - ۳ جب لا$$

$$عف م = \frac{لا \text{ جم } لا - جب لا}{لا}$$

$$عف م = \frac{جب لا - لا \text{ جم } لا}{جب لا}$$

$$عف م = \frac{لا - جب لا \text{ جم } لا}{لا \text{ جم } لا}$$

$$عف م = ۲ س لا \text{ قط } لا$$

$$عف م = ۲ س لا \text{ قط } لا$$

$$عف م = \frac{جم لا - جب لا}{(جب لا + جم لا)}$$

$$عف م = \frac{۲ \text{ جم } لا}{(۱-جب لا)}$$

$$۲۲ - م = \frac{۱ - جم لا}{۱ + جم لا}$$

$$عف م = \frac{۲ جب لا}{(۱ + جم لا)^۲}$$

اشد

رتنا علوں کے تغاؤل

$$۱ - م = (لا ذر) (لا ب) \quad \text{تر حفا م} = (لا و) (لا ب) \quad (م + ن) (لا ب) = (م + ن) (لا ب)$$

$$۲ - م = \frac{لا}{(۱ + لا)}$$

$$عف م = \frac{ن لا}{۱ + (ن + ۱)}$$

$$۳ - م = \sqrt{۱ + لا}$$

$$عف م = \frac{۱}{(ن + ۱)^۲}$$

$$۴ - م = \sqrt{(۱ + لا)(۲ + لا)}$$

$$عف م = \frac{۳ + لا ۲}{(۲ + لا)(۱ - لا)^۲}$$

$$۵ - م = \sqrt{لا - ۱} (۱ + لا)$$

$$عف م = \frac{لا ۳ - ۱}{(لا - ۱)^۲}$$

$$۶ - م = (۱ + لا) \sqrt{لا - ۱}$$

$$عف م = \frac{(۲ لا ۲ + لا - ۱)}{(لا + ۱)^۲}$$

$$۷ - م = \frac{۱}{(لا - ۱)^۲}$$

$$عف م = \frac{لا}{(لا - ۱)^۲}$$

$$۸ - م = \frac{لا}{(لا + ۱)^۲}$$

$$عف م = \frac{۱}{(لا + ۱)^۲}$$

$$۹ - م = \frac{\sqrt{لا + ۱}}{لا}$$

$$عف م = \frac{۱}{(لا + ۱)^۲}$$

$$۱۰ - م = \frac{\sqrt{لا + ۱}}{لا - ۱}$$

$$عف م = \frac{۱}{(لا - ۱)^۲}$$

عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۱- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۲- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۳- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۴- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۵- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۶- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۷- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۸- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۱۹- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۲۰- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۲۱- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۲۲- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۲۳- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$
عف ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$	۲۴- ما = $\frac{1}{1 + 1 + 1}$

امثله  
مقلوب تفاعل

- ۱- ما = جبة (ا-لا) عفا =  $\frac{1}{\sqrt{1-لا}}$
- ۲- ما = لاجبة لا عفا =  $\frac{لا}{\sqrt{1-لا}}$
- ۳- ما = مم لا عفا =  $\frac{1}{1+لا}$
- ۴- ما = قبة لا عفا =  $\frac{1}{لا+لا^2}$
- ۵- ما = تم لا عفا =  $\frac{1}{لا+لا^2}$
- ۶- ما = جبة لا عفا =  $\frac{1}{لا+لا^2}$
- ۷- ما = سن لا سن عفا =  $\frac{1}{لا+لا^2}$
- ۸- ما = جبة لا لا لا عفا =  $\frac{2}{لا+لا^2}$
- ۹- ما = سن لا سن عفا =  $\frac{2}{لا+لا^2}$
- ۱۰- ما = جتم لا عفا =  $\frac{1-لا}{1+لا}$
- ۱۱- ما = سن لا عفا =  $\frac{سن عفا}{سن عفا + جتم لا}$

$$\begin{aligned} ۱۲- \text{ما} = \text{مس} \{ (۱+۱) - (۱) \} & \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{۱}{(۱+۱)^۲} \\ ۱۳- \text{ما} = \text{جبا} (جم) & \quad \text{عف} \text{ما} = ۱ \end{aligned}$$

امثلہ ۹

$$(۱) - \text{مس} \frac{ن}{ف} = \{ (ف) - (ن) \} = \text{گ} \text{فما} (گ) (ن)$$

ایک ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$(۲) - \text{اگر} \text{ما} = \text{مس} \frac{ع}{و} \text{ تو ثابت کر کہ } \text{عف} \text{ما} = \frac{\text{و} \text{عف} \text{ع} - \text{و} \text{ع} \text{و}}{\text{و}^۲ + \text{ع}^۲}$$

$$(۳) - \text{یہ ناکر کہ } \frac{۱ - (ن)}{۱ - (۱)} = ۱ + (۱) + (۱) + \dots + (۱) \text{ تفرق کرنے سے}$$

سلسلہ  $۱ + (۱) + (۱) + \dots + (۱) + (۱) + (۱) + \dots + (۱) + (۱) + (۱) + \dots$  اس کا حاصل جمع دریافت کرو۔ اور  $(۱) = ۱$  رکھ کر نتیجہ کی تصدیق کرو۔ پس ثابت کرو کہ اگر  $(۱) > ۱$  تو  $۱ + (۱) + (۱) + \dots + (۱) + (۱) + (۱) + \dots$  تک  $(۱) - (۱)$

(۴) - اگر ایک نقطہ کی خطی حرکت میں  $و$  فاصلہ میں کا خطی تفاعل ہو تو اس سراع مستقل ہوگا

(۵) - نیز اگر  $و$  فاصلہ میں کا دو درجی تفاعل ہو تو اس سراع خط حرکت میں کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

(۶) - اگر وقت  $ت$  طے شدہ فاصلہ کا دو درجی تفاعل ہو تو اس سراع ایسے بدلتا ہے جیسے رفتار کی تیسری قوت۔

$$(۷) - \text{اگر} \text{و} = ۱ + \frac{\text{جب}}{\text{مس}}$$

تو اس سراع خط حرکت میں کے کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے معکوس کے طور پر بدلتا ہے۔

(۸) - اگر  $ت$  وقت کا دو درجی تفاعل ہو تو اس سراع  $\frac{۱}{ت}$  کے متناسب ہے۔

۹۔ اگر گیس کے حجم اور دباؤ میں رشتہ  $d \propto \frac{1}{V}$  مستقل ہو تو کبھی ایک گاہد کے مساوی ہے۔

### مشکل ۱۰

۱۰۔

(جزوی تفریق)  
۱۔ سطح  $W = (x^2 + y^2 + z^2)$  کے نقشی خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔  
۲۔ نیز سطح  $W = (x^2 + y^2 + z^2)$  کے نقشی (Contour) خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔  
۳۔ اگر  $W = f(x, y, z)$  ف = (x, y, z)  
ثوابت کر کے  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$  اور اس نتیجہ کی ہندی تعبیر تباؤ۔  
۴۔ اگر  $W = f(x, y, z)$  ف = (x, y, z)

ثوابت کر کے  $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$  اور  $\frac{\partial W}{\partial z} = 0$  ف = (x, y, z)

۵۔ اگر  $W = f(x, y, z)$  ف = (x, y, z)

ثوابت کر کے  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$  اور  $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$  ف = (x, y, z)

۶۔ اگر  $W = f(x, y, z)$  ف = (x, y, z)

ثوابت کر کے  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$  اور  $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$  ف = (x, y, z)

۷۔ اگر  $W = f(x, y, z)$  ف = (x, y, z)

ثوابت کر کے  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$  اور  $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$  ف = (x, y, z)





# تیسرا باب

## قوت نامتفاعل اور لوکارتمی تفاعل

۳۶۔ قوت نامتفاعل :- تفاعل زیر بحث کی تعریف کئی طرح کیجا سکتی ہے لیکن علم احصا اور اس کے اکثر اطلاقات کے مد نظر ذیل کی تعریف زیادہ موزوں ہوگی۔ اس تفاعل کی اساسی خاصیت ہے کہ یہ

نمبراً = گ۔ ما ..... (۱)

کے نمونہ کی مساوات کو پورا کرتا ہے جہاں گ مثبت یا منفی مستقل ہے۔ اسے الفاظ میں اس طرح بیان کیے ہیں کہ کسی آن میں تفاعل کے اضافہ کی شرح کو تفاعل کی اسی آن کی نسبت کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے مذکورہ بالا تعریف والے عام قوت نامتفاعل کے مقابلہ خطی تفاعل

ما = ب۔ ج۔ لا ..... (۲)

کے ساتھ کیا جاسکتا ہے۔ اس کو خطی تفاعل کہنے کی وجہ یہ ہے کہ اس کی تربیم ایک سیدھا نقطہ ہے۔ درحقیقت ان دونوں میں وہی رشتہ ہے جو سود مرکب کو سود منفرد کے ساتھ ہے بشرطیکہ سود مرکب مستقل وقفوں کے بعد جمع ہونے کی بجائے مسلسل جمع ہوتا رہے۔

۱۔ بعد میں معلوم ہوگا کہ اگر ملا باطن مقدار ہے تو یہ لازماً ج و کی شکل کا ہوگا اور اصطلاح ”قوت نامتفاعل“ کی وجہ بھی یہ ہے کہ اس میں تغیر لا بطور قوت نام کے شریک ہوتا ہے۔

تہاہر فیضی تہاہر میں جو مستقل ہیں یعنی وہ حال جب اور بہتہ دانی قیمت اور۔  
اگر یہ بار بار (بہتہ دانی) سے کافی طور پر واضح نہ ہوتا تو ہم غالباً معیار رزی فیضی تہاہر  
انہی کے لیے جسکا ذرا مال اور ابتدائی قیمت دونوں ایک کے مساوی ہوں یعنی

.....

اب اس میں اور عاقلہ کو یہاں سے کو مناسب طور پر بدھنے سے غافل ہو کر مل

ای فوج مانتہ تمام اعلیٰ میں ہیں۔ مستی شریک ہیں۔ است  
وہاں مستقل کردار استہالی فوج میں جو فوجی کہو کہ ج۔

ابھی زمانہ تھا کہ جہانگیر نے تھاکر کو پیر سے ملو پھینک کر دیا  
 ہم اس تغافل کو بھیاری تغافل کہتے جس میں گناہ اور جرم کی رائے نہ ہو

۱۰۰ سیرہ ہفتادو گیسو ہفتونہ تا حال کی تقریباً سات

..... 6.  $\frac{5}{11}$

نہ اُن کے لئے کہیں نہ ہو ایک سو چھ لاکھ۔

۱۴۰۲ - منہ بولتے تھے کہ یہ سب تو میری ثابت کرا ہے

نفا علی کا وجود ہے اور پھر اگر مگر یہ جو توفیق کوئی دیا خدا ایضاً دریافت کرنا ہے۔ پھر یہ ہے  
یہ اس میں مغرور نہیں کہ ہے نفا علی کی کیفیت کسی سناؤ یہ قبر پر ہوتا ہے کہ کمالی بڑا ہے یہ  
بھو را نہاں سے فرض کر دے کہ مسأواہ ہے

(1) .....  $i = \frac{0.5}{5.5}$

یہاں کے بقیہ کے بارے میں ایک فصل جمع ہے

$$(2) \quad \dots\dots\dots + \frac{1}{n} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2} + 1 = n$$

اس کی پہلی رقم اس شرط کے ماتحت تعین ہوتی ہے کہ ما = ۱ جبکہ لا = ۰۔۔۔۔۔  
 اس مفروضہ کی بنا پر کہ ما کا یہ لامتناہی سلسلہ اسی ضابطہ کے لگانے سے  
 تفرق کیا جاسکتا ہے جو درجہ ۲۹ میں محسوس و مسلسلوں  
 کے لئے دیا گیا ہے جس میں حاصل ہوگا

$$\frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{n} + \dots + \frac{۱}{\infty} \quad (۳)$$

اور مساوات (۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۳} = \dots = ۱ + \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{\infty} \quad (۴)$$

$$\text{یعنی } ۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۳} = \dots = ۱ + \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{\infty} \quad \dots$$

$$\text{اور اسی طرح بالعموم } ۱ = ۱ + \frac{۱}{n} \quad (۵)$$

$$\text{پس ہم سلسلہ } ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{n} + \dots + \frac{۱}{\infty} \quad (۶)$$

کے مطالعہ پر مجبور ہیں۔ یہ سلسلہ مستند ہے اور لا کی کسی دی ہوئی قیمت  
 کے لئے اس کا حاصل جمع معین ہوگا۔ یہ سلسلہ مستند ہونے کی وجہ یہ ہے  
 (ن + ۱) میں اور ن میں یہ سلسلہ مستند ہے۔ یعنی یہ سلسلہ مستند ہے  
 ن کو کافی بڑا لیتے۔ یہ خاصہ نونہ کی عبارت سے ہے جس میں اس سلسلہ  
 میں ہمیشہ ایک مقام ایسا رہتا ہے کہ اس کے بعد کی کسی بھی  
 ہندسی سلسلہ کی رقموں میں یہ سلسلہ مستند رہے۔ اس لئے  
 دفعہ (۵) کے مطابق یہ سلسلہ مستند ہے۔ صرف مستند ہی نہیں بلکہ مطلق  
 طور پر مستند ہے اس کے حاصل جمع کو ہم ق (۱) سے ظاہر کرینگے۔  
 اب ہم ثابت کرینگے کہ تفاعل ق (۱) جسکی تعین حسب بالا ہوتی ہے  
 سلسلہ اور قابل تفرق ہے اور یہ دراصل مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ

$$م (لا) = \frac{1}{2} [ق (لا) + ق (-لا)] = 1 + \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^4}{4} + \frac{لا^6}{6} + \dots$$

$$اور ج (لا) = \frac{1}{2} [ق (لا) - ق (-لا)] = لا + \frac{لا^3}{3} + \frac{لا^5}{5} + \frac{لا^7}{7} + \dots$$

پس ق (لا) = م (لا) + ج (لا) اور ق (-لا) = م (-لا) - ج (لا) (۹)  
یہ صاف ظاہر ہے کہ م (لا) کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اور ج (لا) کی تمام قیمتوں  
کی درجہ علامت ہے جو لا کی - آئندہ کی بحث میں اس خاصیت کی رو سے بہت  
پیدا ہوگی۔

اگر لا اور لا متغیر کی دو قیمتیں ہوں جنہیں ہم ایک ہی علامت سے کا فرض  
کر لیتے ہیں تو دفعہ ۵ کے ضابطہ (آ) اور (۲) کی رو سے قیل کی مساویات حاصل  
ہوئی ہیں۔

$$م (لا) - م (-لا) = \frac{لا^2 - (-لا)^2}{2} + \frac{لا^4 - (-لا)^4}{4} + \dots + \frac{لا^{2n} - (-لا)^{2n}}{2n} + \dots$$

$$= \frac{لا^2 + لا^4 + لا^6 + \dots + لا^{2n}}{2} + \frac{لا^4 + لا^6 + لا^8 + \dots + لا^{2n}}{4} + \dots + \frac{لا^{2n-2} + لا^{2n-4} + \dots + لا^2}{2n} + \dots$$

(۱۰) --

فرض کرو کہ ظہ ایسی مثبت مقدار ہے کہ وہ لا اور لا میں سے بڑی مقدار کی  
مطلق قیمت کے مساوی ہے۔

$$تو |لا| + |لا|^{2n-2} + \dots + |لا|^{2n-2} + |لا|^{2n-2} > 2n ظہ \dots (۱۱)$$

اور نتیجہ (۱۰) میں خطوط وحدانی کے درمیان کا سلسلہ مطلق قیمت کے لحاظ سے

$$ظہ + \frac{ظہ^2}{3} + \dots + \frac{ظہ^{2n-2}}{2n-2} + \dots$$

سے کم ہے یعنی ج (ظہ) سے

کم ہے جو خود محدود ہے۔ اس لئے

$$\text{نہا} = \{ \text{م} (\text{لا}) - \text{م} (\text{لا}) \} = \dots \dots (12)$$

اس لئے تفاعل م (لا) متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ یہی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج (لا) بھی مسلسل ہے۔ اب نتیجہ (۹) سے ق (لا) کا شل ثابت ہوتا ہے نیز (۱۰) سے

$$\text{م} (\text{لا}) - \text{م} (\text{لا}) = \frac{\text{لا} + \text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}}{\text{لا}} + \dots + \frac{\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}}{\text{لا}} + \dots (13)$$

بائیں جانب کی رقمیں ایک علامت کی ہیں خواہ لا اور لا مثبت ہوں یا منفی۔ اس لئے مساوات (۱۳) میں آخری رقم کے شمار کنندہ کی قیمت ان لا اور ان لا کے درمیان ہوگی اور اس لئے سلسلہ کا حاصل جمع ج (لا) اور ج (لا) کے درمیان ہوگا۔ چونکہ ج (لا) مسلسل تفاعل ہے اس لئے

$$\text{نہا} = \frac{\text{م} (\text{لا}) - \text{م} (\text{لا})}{\text{لا} - \text{لا}} = \text{ج} (\text{لا}) \dots \dots (14)$$

یعنی م (لا) = ج (لا) اور اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\text{ج} (\text{لا}) = \text{م} (\text{لا}) \dots \dots (15)$$

$$\text{پس ق} (\text{لا}) = \frac{\text{م} (\text{لا}) + \text{ج} (\text{لا})}{\text{لا}}$$

$$= \text{م} (\text{لا}) + \text{ج} (\text{لا})$$

$$= \text{ج} (\text{لا}) + \text{م} (\text{لا}) = \text{ق} (\text{لا}) \dots \dots (16)$$

اس لئے رشتہ ما = ق (لا) لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوات (۱۱) کو پورا کرتا ہے۔

نیز ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات (۱) کا حل جو شرط ما = ۱، لا = ۰ کے  
تالیف کا منسلک ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر ع اور و دو ایسے حل ہوں  
تو  $\frac{ف}{ع} = ۶$  اور  $\frac{ف}{و} = ۶$  ..... (۱۸)

یعنی  $\frac{ف}{ع} = ۶$  اور  $\frac{ف}{و} = ۶$  ..... (۱۹)

یا  $\frac{ف}{و} = \left(\frac{۶}{۱}\right) = ۰$  ..... (۲۰)

اس لئے ثابت ہوا کہ  $\frac{ف}{و}$  کی نسبت مستقل ہے۔ اور اگر  $ع = ۱$  و = ۰  
جبکہ لا = ۰ تو اس مستقل کا ایک ہونا ضروری ہے پس  $ع = ۶$  و

۳۸۔ مسئلہ جمع اور ق (لا) کی ترسیم۔

عام تر مساوات  $\frac{ف}{ع} = ۶$  ..... (۱)  
ذیل کی صورت میں لکھ کر جا سکتی ہے

$\frac{ف}{ع} = ۶$  ..... (۲)

اور اس کے مساوی  $\frac{ف}{ع} = ۶$  کے ماتحت ما = ق (گ لا) ..... (۳) ہوگا۔  
اب فرض کر لیں کہ

$ع = ۶$  ق (لا) x ق (ب لا) ..... (۴)  
تو  $\frac{ف}{ع} = ۶$  ق (لا) x ق (ب لا) + ب ق (ب لا) x ق (لا)

\* اس میں ہم نے ایک بالکل ظاہر مسئلہ کو مان لیا ہے جس کا باضابطہ ثبوت  
صفحہ ۵۶ میں دیا جائیگا۔

$$(۵) \dots\dots\dots = (۱+ب) ق (۱+لا) ق (ب+لا) = (۱+ب) \times (۱+لا) \dots\dots\dots (۵)$$

نیز ع کی ابتدائی قیمت ایک ہے۔ پس

$$(۶) \dots\dots\dots = ع \{ (۱+ب) (۱+لا) \} \dots\dots\dots (۶)$$

یعنی ۱ اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$(۷) \dots\dots\dots ق (۱+لا) \times ق (ب+لا) = ق (۱+ب) \times ق (۱+لا) \dots\dots\dots (۷)$$

یہ توت کا تفاعلوں کا مسئلہ جمع کہلاتا ہے۔

$$(۸) \dots\dots\dots ق (۱+لا) \times ق (ب+لا) = ق (۱+ب) \times ق (۱+لا) \dots\dots\dots (۸)$$

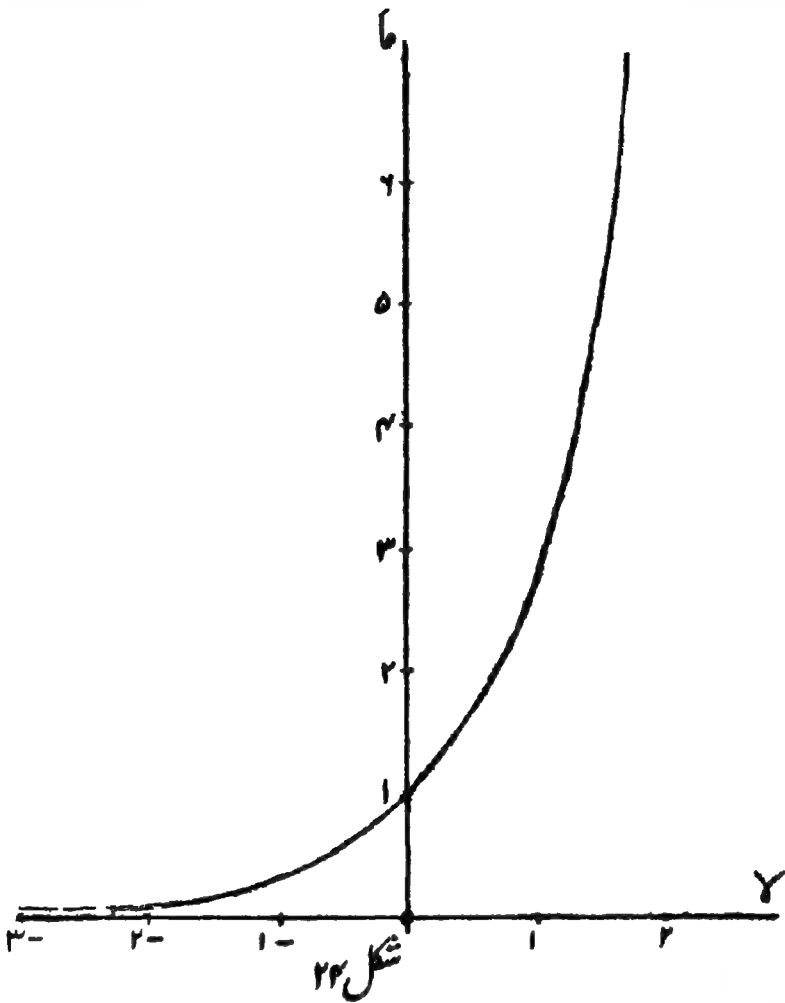
$$(۹) \dots\dots\dots ق (۱+لا) = \frac{1}{ق (۱+لا)} \dots\dots\dots (۹)$$

ہم نے پہلے ثابت کیا ہے کہ تفاعل ق (۱+لا) سلسل ہے۔ نیز لا کی مثبت قیمتوں کے لئے ق (۱+لا) کے سلسلہ کی ہر ایک رقم لا کے ساتھ بڑھتی ہے اور لا سے + ∞ کے لئے لا انتہائی بڑی ہو جاتی ہے۔ اس لئے حاصل جمع کے لئے بھی یہ بات ضروری طور پر صحیح ہے۔

علاوہ اس کے (۹) سے ظاہر ہے کہ اگر لا مثبت ہو تو ق (۱+لا) بھی مثبت ہوتا ہے اور مطلق قیمت میں کم ہوتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور لا سے ∞ کے لئے صفر ہو جاتا ہے۔ اس لئے جیسے لا کی قیمت - ∞ سے + ∞ تک بڑھتی ہے، تفاعل ق (۱+لا) سلسل طور پر صفر سے + ∞ تک بڑھتا ہے اور ہر ایک درمیانی قیمت صفر سے ایک ہی مرتبہ اختیار کرتا ہے۔

صفحہ ۱۱ کی شکل نمبر ۱۱ ق (۱+لا) کی ترسیم ہے۔ اور تفاعل ق (۱+لا) کی عددی قیمتوں کا تختہ کتاب کے قلم پر جدول (ع) میں دیا گیا ہے۔





دیں تو

$$\{ق(۱)\}^{\circ} = ق(۱+۱+.....ن رقوم تک) = ق(ن).....(۲)$$

مقدار ق (۱) یعنی سلسلہ

$$(۳)..... + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۲} + ۱ + ۱$$

کو ہم علامت "قو" سے تعبیر کریں گے 'اعشاریہ کے سات مقام تک ایک قیست

اس ترقیم میں اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ق(ن) = قو.....(۴)$$

نیز اگر  $\frac{۱}{۲}$  منفرد ترین رقوم میں کوئی حسابی منطوق کسر ہو تو

$$\{ق(\frac{۱}{۲})\}^{\circ} = ق(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + .....ن رقوم تک) = ق(۴) = قو$$

$$(۵)..... ق(\frac{۱}{۳}) = قو$$

پس اگر لا کوئی مثبت منطوق مقدار ہو صحیح عدد یا کسر تو

$$ق(لا) = قولا.....(۶)$$

اب دفعہ ۳۸ (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ق(-لا) = \frac{1}{ق(لا)} = \frac{1}{قو} = قولا$$

یعنی نتیجہ (۶) لا کی تمام منطوق قیستوں کے لئے صحیح ہے خواہ یہ مثبت ہوں یا منفی۔ یہ قابل توجہ ہے کہ لا کے غیر منطوق ہونے کی صورت میں علامت

قولا کی (ہنوز) تعریف نہیں کی گئی۔ اب ہم اس کی تعریف یوں کر سکتے ہیں کہ



جن کے خواص عام مشلت کے عام تفاعلوں کے خواص کے ساتھ باقاعدہ مشابہت رکھتے ہیں، ان تفاعلوں کو ہم زائدی جیب، جیب التام، ماس وغیرہ کہیں گے۔ انکی تعریفیں ذیل میں دی جاتی ہیں۔

$$\begin{cases} \text{جبنر لا} = \frac{1}{1} \cdot (\text{قو} - \text{قو}') = \text{لا} + \frac{\text{لا}'}{1} + \frac{\text{لا}''}{1} + \dots \\ \text{جمنر لا} = \frac{1}{1} \cdot (\text{قو} + \text{قو}') = 1 + \frac{\text{لا}'}{1} + \frac{\text{لا}''}{1} + \dots \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{منر لا} = \frac{\text{جمنر لا}}{\text{جمنر لا}} & \text{قطنر لا} = \frac{1}{\text{جمنر لا}} \\ \text{من لا} = \frac{\text{جمنر لا}}{\text{جمنر لا}} & \text{قمن لا} = \frac{1}{\text{جمنر لا}} \end{cases} \quad (2)$$

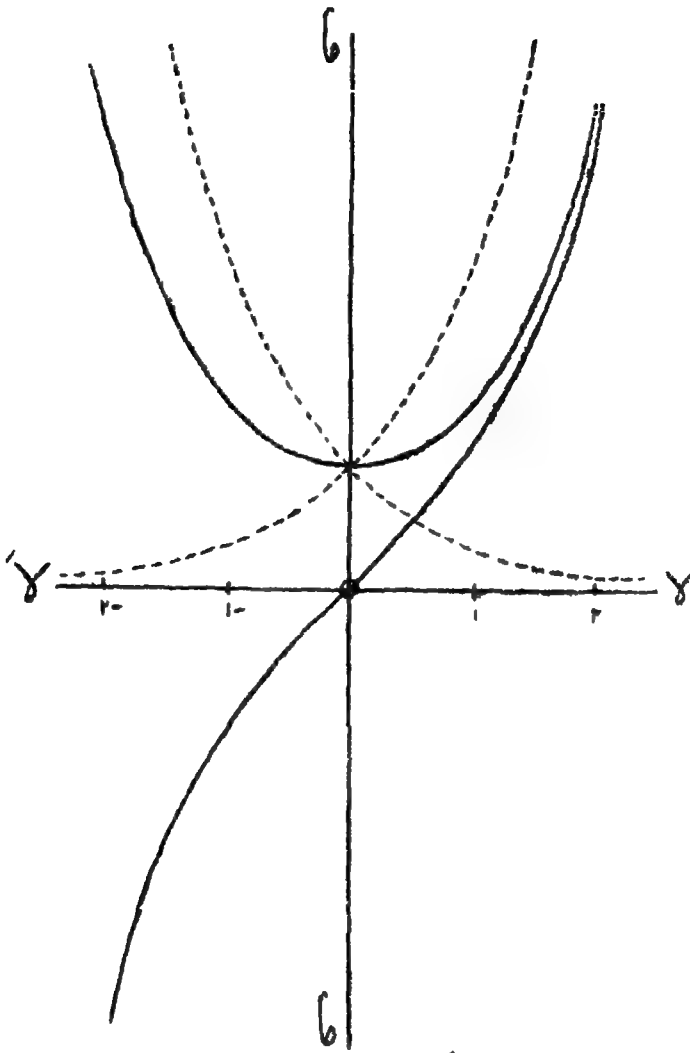
ہم دیکھتے ہیں کہ جمنر لا تفاعل جمن لا کی طرح 'جنت' تفاعل سے یعنی لا کی بجائے لا' کہنے سے اسکی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اور برخلاف اس کے جمنر لا تفاعل جب لا کی طرح طاق تفاعل سے یعنی لا کی بجائے لا' کہنے سے تفاعل کی مطلق قیمت وہی رہتی ہے لیکن علامت بدل جاتی ہے۔

شکل ۱۵ میں منہی ما = قو اور ما = قو' لفظوں والے خطوط سے دکھائے گئے۔

ہیں اور منہی ما = جمنر لا اور ما = جبنر لا جو اوپر کے معنیوں کے معنیوں کے بالترتیب نصف مجموعہ اور نصف فرق لینے سے حاصل ہوتے ہیں مسلسل خط میں دکھائے گئے ہیں۔

\* چند باتوں میں ان تفاعلوں کو قائم زائد کے ساتھ وہی رشتہ ہے جو مستر تفاعلوں کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ دیکھو نمبر ۱۰۰ مثال ۲۔

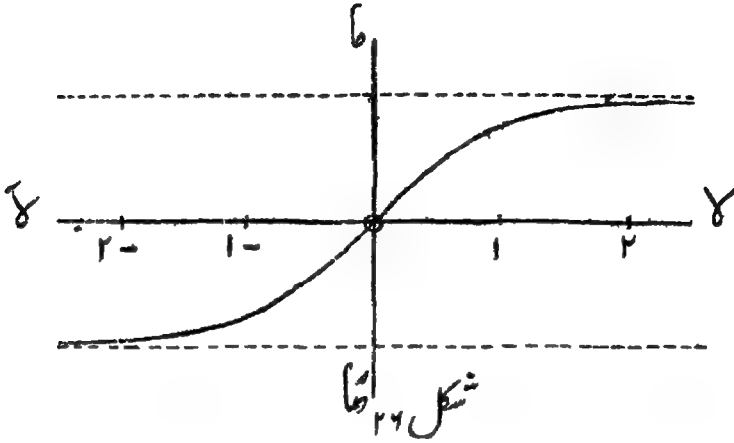
\* یہ تفاعل ذرا مختلف طریقہ سے دہرے میں نمودار ہو چکے ہیں۔  
\* منہی ما = جمنر لا کو قائم سکونیات میں زنجیرہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ کیونکہ یہاں کشاف دالی زنجیرہ قوت جاذبہ کے زیر عمل آؤدائہ لگ رہی ہو یہ شکل اختیار کرتی ہے۔



شکل ۲۵

چونکہ تفاعل جنس لا اور جنس لا مسلسل میں اور جنس لا کبھی صف نہیں ہوتا  
اس لئے ثابت ہوا کہ مسٹر لا تغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مستقل ہے  
شکل ۲۶ میں تنحنی  $\alpha =$  مسٹر لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے خطوط  $\alpha = \pm 1$  کے

تقارب میں\*



چونکہ جمن<sup>۱</sup> لا + جبن<sup>۱</sup> لا = فو<sup>۱</sup> اور جمن<sup>۱</sup> لا - جبن<sup>۱</sup> لا = قو<sup>۱</sup> ..... (۳)

اس لئے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

جمن<sup>۱</sup> لا - جبن<sup>۱</sup> لا = ۱ ..... (۴)  
نیز اسکو بالترتیب جمن<sup>۲</sup> لا اور جبن<sup>۲</sup> لا سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۵) \dots \dots \dots \begin{cases} \text{قطن<sup>۲</sup> لا} = ۱ - \text{مسن<sup>۲</sup> لا} \\ \text{قمن<sup>۲</sup> لا} = \text{ممن<sup>۲</sup> لا} - ۱ \end{cases}$$

$$\text{نیز جمن<sup>۱</sup> لا + ما} = \frac{۱}{۳} (\text{فو<sup>۱</sup> ما} + \text{قو<sup>۱</sup> ما})$$

$$= \frac{۱}{۳} \{ (\text{جمن<sup>۱</sup> لا} + \text{جبن<sup>۱</sup> لا}) (\text{جمن<sup>۱</sup> ما} + \text{جبن<sup>۱</sup> ما}) + (\text{جمن<sup>۱</sup> لا} - \text{جبن<sup>۱</sup> لا}) (\text{جمن<sup>۱</sup> ما} - \text{جبن<sup>۱</sup> ما}) \}$$

(۶) ..... جمن<sup>۱</sup> لا جمن<sup>۱</sup> ما + جبن<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> ما =

۱ تفاعل جمن<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> لا اور مسن<sup>۱</sup> لا کی قیمتیں اثنائے تین مقام تک لاکھ قیمتوں میں سے  
۵۰ لاکھ کے لئے وقفوں ۱۱ پر ضمیمہ کے جدول ع میں دی ہوئی ہیں۔

اور اسی طرح

(۷) جبن<sup>۱</sup> (لا + ما) = جبن<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> ما + جبن<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> ما .....  
 اور بالخصوص جبن<sup>۱</sup> لا = جبن<sup>۱</sup> لا + جبن<sup>۱</sup> لا + جبن<sup>۱</sup> لا = ۲ جبن<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۸)  
 نتیجہ (۴) اور (۵) ذیل کے مثلثی نتائج کے مقابلہ میں ہیں

(۹) جب<sup>۱</sup> لا + جبن<sup>۱</sup> لا = ۱ ..... (۹)

قط<sup>۱</sup> لا = ۱ + س<sup>۱</sup> لا ..... (۱۰)

فم<sup>۱</sup> لا = ۱ + مم<sup>۱</sup> لا ..... (۱۰)

اور اسی طرح نتیجہ (۸) ذیل کے نتائج کے مشابہ ہیں

جبن<sup>۱</sup> لا = جبن<sup>۱</sup> لا - جب<sup>۱</sup> لا جب<sup>۱</sup> لا = ۲ جب<sup>۱</sup> لا جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۱۱)

۲۱۔ زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

(۱) اگر ما = جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۱)

تو فرما = عف (فرما - فرما) = ۱/۴ (عف فرما - عف تو)

(۲) ۱/۴ (فرما + فرما) = جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۲)

اسی طرح اگر ما = جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۳)

تو فرما = جبن<sup>۱</sup> لا ..... (۴)

(۵) اگر ما = مسن<sup>۱</sup> لا ..... (۵)

تو فرما = عف (جبن<sup>۱</sup> لا) = جبن<sup>۱</sup> لا × عف جبن<sup>۱</sup> لا - جبن<sup>۱</sup> لا × عف جبن<sup>۱</sup> لا  
 جبن<sup>۱</sup> لا

(۶) جبن<sup>۱</sup> لا - جبن<sup>۱</sup> لا = قطن<sup>۱</sup> لا ..... (۶)

دفعہ ۴۰ (۴) کی مدد سے۔

اسی طرح اگر ما = مم<sup>۱</sup> لا ..... (۷)

- تو  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{تمز لا}}{\text{تمز لا}}$  ..... (۸)
- (۹) اگر  $\frac{\text{ما}}{\text{قطنر لا}} = - \frac{\text{قطنر لا}}{\text{قطنر لا}}$  ..... (۹)
- تو دفعہ ۳۱ (۴) کی مدد سے
- فرما  $\frac{\text{عف}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{عف}}{\text{عف}} = \frac{\text{عف}}{\text{عف}} = \frac{\text{عف}}{\text{عف}}$  ..... (۱۰)
- اسی طرح اگر  $\frac{\text{ما}}{\text{تمز لا}} = - \frac{\text{تمز لا}}{\text{تمز لا}}$  ..... (۱۱)
- تو  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{جمنر لا}}{\text{جمنر لا}}$  ..... (۱۲)

## ۴۲۔ لوکار تہی تفاعل۔

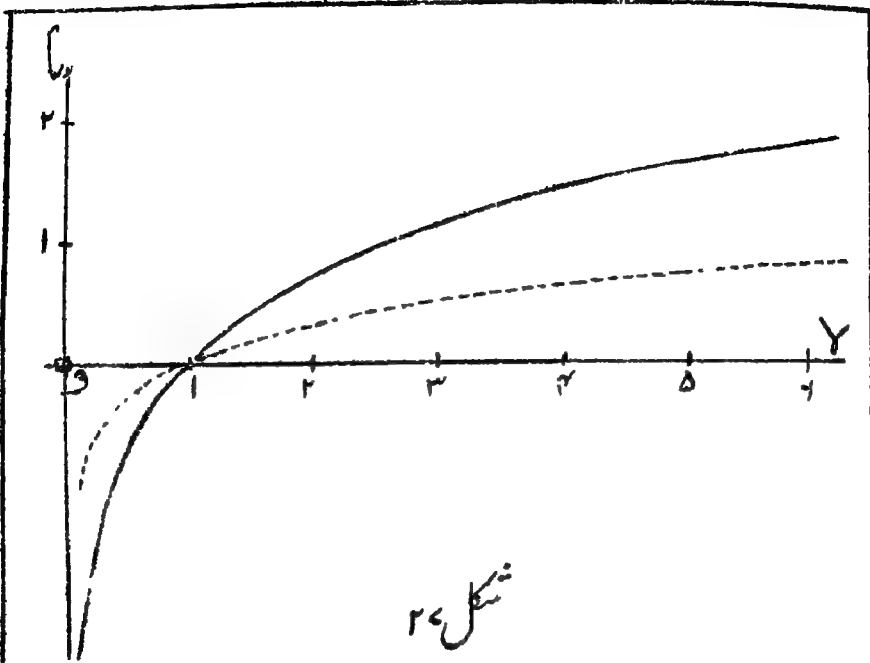
توت ناما تفاعل کے متعوب تفاعل کو لوکار تہی تفاعل کہتے ہیں۔

- اب اگر  $\frac{\text{لا}}{\text{فونا}} = \frac{\text{فونا}}{\text{فونا}}$  ..... (۱)
- تو  $\frac{\text{ما}}{\text{لوگ لا}} = \frac{\text{لوگ لا}}{\text{لوگ لا}}$  ..... (۱)
- دفعہ ۳۸ میں ہم نے دیکھا تھا کہ جسے  $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \infty$  سے مغز میں سے ہوتا ہوا  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \infty$  تک بڑھتا ہے تو  $\frac{\text{فونا}}{\text{فونا}}$  بھی مسلسل طور پر مغز سے ایک میں سے ہوتا ہوا  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \infty$  تک بڑھتا ہے۔ پس  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$  کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے لوگ لا کی صرف ایک ہی قیمت ہے، نیز یہ قیمت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اسکے کہ  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} < 1$  یا  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} > 1$ ۔ نیز جبکہ  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = 1$  تو  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \infty$  اور  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \infty$  کے لئے  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \infty$  کی منفی قیمتوں کے لئے لوکار تہی تفاعل وجود نہیں رکھتا۔
- لوکار تہی تفاعل کے عام خواص اس تعریف سے حسب معمول طریقوں سے ماہل ہو سکتے ہیں۔ شکل ۲ میں مسلسل خط سے لوگ لا کی تریسم دکھائی گئی ہے ظاہر ہے کہ یہ تریسم شکل میں دی ہے جو  $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$  کی ہے (دیکھو شکل ۲۲ صفحہ ۱۱۰) صرف لا اور ما آہل میں بدل دئے گئے ہیں۔

\* تفاعل لوگ لا کی قیمتیں ضمیمہ کی جدول ف میں دی گئی ہیں۔







اس کتاب میں علامت لوگ لا ہمیشہ لوگو لا کو تعبیر کرے گی۔

۴۳۔ چند انتہائی قیمتیں۔

قوت نما اور لوکارتی تفاعلوں سے متعلق چند انتہائی قیمتیں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔

(۱) ..... لا قوت لا ..... (۱)

کو محسوب کرو۔  
یہ تفاعل غیر معین شکل  $\infty \times \infty$  اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ

$$\frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots} = \frac{1}{\infty}$$

اس لئے ظاہر ہے کہ دریافت طلب انتہا صفر ہے۔  
اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  $\infty$  کی تمام ناطق قیمتوں کے لئے

$$\text{نیا } \infty \text{ لا } \infty = \dots (۲)$$

اس سے حاصل ہوا کہ جیسے  $\infty$ ،  $\infty$  انتہا بڑھتا ہے  $\infty$  بمقابلہ  $\infty$  کی بڑی سے  
بڑی قوت کے  $\infty$  انتہا ہو جاتا ہے۔ نیز اگر  $\infty$  ایک سے کم مثبت مقدار ہو تو

$$\text{نیا } \infty \text{ ن } \infty = \dots (۳)$$

اس کے ثبوت کے لئے فرض کرو کہ  
گ = لوگ  $\left(\frac{1}{\infty}\right)$

اب چونکہ گ مثبت ہے  
ن  $\infty$  = ن  $\infty$  گ

(۲) اب اگر نتیجہ (۱) میں ہم  $\infty$  ی =  $\infty$  یعنی  $\infty$  = لوگ ی تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{نیا } \infty \text{ ی } \infty = \dots (۴)$$

پس جیسے  $\infty$  بے انتہا بڑھتا ہے ویسے لوگ  $\infty$  بھی  $\infty$  انتہا بڑھتا ہے لیکن  
 $\infty$  کے مقابلہ میں  $\infty$  انتہا چھوٹا رہتا ہے۔

(۳) نیز اگر نتیجہ (۱) میں ی =  $\infty$  یعنی  $\infty$  = لوگ ی کہیں تو حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{نیا } \infty \text{ ی } \infty = \dots (۵)$$

$$(۳) \text{ اب } \frac{1}{\infty} = 1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} (1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} + \dots)$$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستحق ہے اور اسلئے اس کا حاصل جمع محدود ہے۔

پس نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  ..... (۶)

اور اگر لا کی بجائے گ لکھیں تو

نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  ..... (۷)

اور اس میں گ = لوگ ۱ درج کرنے سے جہاں مثبت مقدار ہے  
حاصل ہوتا ہے

نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  لوگ ۱ ..... (۸)

نیز لا = ۱ درج کرنے سے اس نتیجہ کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے

نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  لوگ ۱ ..... (۹)

۸۶ (۱۰) اگر (۹) میں لا = لوگ (۱+۱) یعنی ۱+۱ لکھیں تو حاصل ہوگا

نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  لوگ (۱+۱) ..... (۱۰)

(۱۱) اگر  $1 + \left(\frac{1}{1}\right) = 2$  ..... (۱۱)

تو لوگ ۲ = ۱ +  $\left(\frac{1}{1}\right)$

اور اس میں لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

نہیا لوگ ۲ = ۱ +  $\left(\frac{1}{1}\right)$  [نتیجہ (۱۰) کی مدد سے]

پس نہیا  $\frac{1}{1} = 1$  ..... (۱۲)  
..... (۱۳)

بعض اوقات جبر و مقابلہ میں دائیں جانب کی اہتر سے قوت نما تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔

۴۴۔ لوکارتم کا تفسیق

(۱) اگر  $\text{وا} = \text{لوک}$  ..... (۱)

تو  $\text{وا} = \text{فرما}$  اور  $\text{فرما} = \text{فرما} = \text{وا} = \text{وا}$

(۲) .....  $\frac{1}{\text{وا}} = \frac{1}{\text{فرما}}$

اور جب تک یہ لکھتا ہے جیسے  $\text{وا}$  بڑھتا ہے اس لئے اس کے مخفی کے تماس کا میلان محور  $\text{وا}$  سے کم ہوتا جاتا ہے۔ شکل ۲۷ صفحہ (۱۱۹) دیکھو۔

(۳) اگر  $\text{وا} = \text{لوک}$  ..... (۳)

تو  $\text{وا} = \text{فرما}$ ،  $\text{فرما} = \text{وا} \times \text{لوک} = \text{وا} = \text{لوک}$

(۴) .....  $\frac{1}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{لوک}} \times \frac{1}{\text{وا}}$

مثلاً اگر  $\text{ما} = \text{لوک}$  ..... (۵)

تو  $\text{فرما} = \frac{\text{ما}}{\text{وا}}$  ..... (۶)

جہاں  $\text{وند ما} = \text{ما}$  کے مطابق  $\text{ما} = ۳۳۳۳$ ؛

(۷) اگر  $\text{ما} = \text{لوک}$  ..... (۷)

جہاں  $\text{ما}$  تنصیر کا معلومہ تفاعل ہے تو  $\text{وند ما} = ۳۲$  کے مطابق

(۸) .....  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} \times \frac{1}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{فرما}}$

مثال ۱۔ اگر  $\text{ما} = \text{لوک}$  (جب  $\text{وا}$ ) ..... (۹)

تو فرما  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{جب لا}} \times \text{عف (جب لا)} = \text{م لا}$  ..... (۱۰)

اسی طرح اگر ما = لوک، قط لا = لوک جم لا ..... (۱۱)

تو فرما  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \text{س لا}$  ..... (۱۲)

مثال ۲- اگر ما = لوک (س  $\frac{1}{4}$  لا) ..... (۱۳)

تو فرما  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{س لا}} \times \text{عف (س لا)} = \frac{1}{\text{س لا}} \times \frac{1}{4} \times \text{قط لا} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\text{س لا}} \times \text{قط لا}$

(۱۴) .....  $\frac{1}{\text{جب لا}} =$

اسی طرح اگر ما = لوک س  $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$  ..... (۱۵)

تو ہمیں ملے ہوگا  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{جم لا}}$  ..... (۱۶)

مثال ۳- اگر ما =  $\frac{1}{4}$  لوک  $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$

$\frac{1}{4} \text{ لوک } (1 + 1) - \frac{1}{4} \text{ لوک } (1 - 1)$  ..... (۱۷)

تو فرما  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{0} = \frac{1}{8} + \frac{1}{0}$  ..... (۱۸)

مثال ۴- فرض کر دو کہ ما = لوک  $\{ \frac{1}{1 \pm \sqrt{1}} + 1 \}$  ..... (۱۹)

تو فرما  $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\{ \frac{1}{1 \pm \sqrt{1}} + 1 \}} \times \text{عف } \{ \frac{1}{1 \pm \sqrt{1}} + 1 \}$

$\{ \frac{1}{1 \pm \sqrt{1}} + 1 \} \times \frac{1}{\{ \frac{1}{1 \pm \sqrt{1}} + 1 \}} =$

(۲۰) .....  $\frac{1}{\sqrt{1 \pm 1}} =$

۴۵۔ لوکار تہی تفرق زیادہ اجزاء ضروری داتے تفاعل کو تفرق کرنے سے پہلے تفاعل کا لوکار تم لینے سے اکثر دفعہ سہولت ہو جاتی ہے۔

پس اگر  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 6$  ..... (۱)

تو لوک ماہ = لوک عہ + لوک عہ + لوک عہ ... لوک و - لوک و - لوک و - (۲)  
اور اس سے بھی حسب دفعہ (۴) (۳)

$$\dots + \frac{1}{6} \frac{\text{فرع 6}}{\text{فرع 3}} + \frac{1}{6} \frac{\text{فرع 5}}{\text{فرع 2}} + \frac{1}{6} \frac{\text{فرع 4}}{\text{فرع 1}} = \frac{1}{6} \frac{\text{فرع 6}}{\text{فرع 3}}$$

$$(۳) \dots \frac{1}{۳} \frac{\text{فرو ۳}}{\text{فر ۳}} - \frac{1}{۲} \frac{\text{فرو ۲}}{\text{فر ۲}} - \frac{1}{۱} \frac{\text{فرو ۱}}{\text{فر ۱}}$$

دفعہ ۳ اور ۴ کے نتیجوں کی یہ عام شکل ہے

یہی طریقہ فائدہ مند ہے۔  
کے تفریق کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اب لوگ ماہ لوگ ع..... (۵)

اس لئے  $\frac{1}{6} = \frac{\text{نرما}}{\text{نرلا}} = \frac{\text{نرو}}{\text{نرلا}} \times \text{لوک} + \frac{\text{و}}{\text{نرلا}}$ ..... (۶)

پس  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر و لوک ع + وع}}{\text{فر لا}} \dots \dots \dots (۷)$

یعنی تفاعل اور وکوباری باری مستقل ہاں کہ تفرق کریں اور نتیجہ کو جمع کر لیں۔

$$\frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a-b)} = 6 \quad \text{مثال ۱- اگر}$$

تو کوک =  $\frac{1}{p}$  کوک (ج + پ) +  $\frac{1}{p}$  کوک (ج + پ) -  $\frac{1}{p}$  کوک (ج - پ) -  $\frac{1}{p}$  کوک (ج - پ)

$$\begin{aligned} \text{پس } \frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\text{ا} + \text{و}} + \frac{1}{\text{ا} + \text{لا}} + \frac{1}{\text{ب} + \text{و}} + \frac{1}{\text{ب} + \text{لا}} \right\} \\ &= \frac{\text{ا} + \text{و}}{2(\text{ا} + \text{و})(\text{ا} + \text{لا})} + \frac{\text{ب}}{2(\text{ا} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا})} + \frac{\text{ا} + \text{و}}{2(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{و})} + \frac{\text{ب}}{2(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{لا})} \\ &= \frac{(\text{ا} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا}) + \text{ب}(\text{ا} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا}) + (\text{ا} + \text{و})(\text{ب} + \text{و})(\text{ا} + \text{لا}) + \text{ب}(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{لا})}{2(\text{ا} + \text{و})(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا})} \\ &= \frac{(\text{ا} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا})}{2(\text{ا} + \text{و})(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{و})(\text{ب} + \text{لا})} \\ \text{مثال ۲۔} \quad \text{اگر } \text{ما} &= \text{لا} \end{aligned}$$

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} = \text{لا} (\text{ا} + \text{لوک لا})$$

۴۶۔ متقابل زائدی تفاعل - منقلب زائدی تفاعل  
جنز لا، جنز لا، مسنر لا، وغیرہ وغیرہ کی تعریف اسی اصول پر کی جائیگی۔  
جو دفعہ ۱۶ میں بتایا گیا ہے۔  
یعنی ما = جنز لا کے معنی یہ ہیں کہ لا = جنز ما ..... (۱)  
اور اسی طرح باقی منقلب تفاعلوں کے لئے۔  
یہ تمام منقلب لوکار تفاعلوں کے رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

$$\text{پس اگر } \text{لا} = \text{جنز ما} = \frac{1}{4} (\text{و} - \text{و} - \text{و} - \text{و}) \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{تو } \text{و} - \text{و} - \text{و} - \text{و} = ۱ \dots \dots \dots (۳)$$

و میں دوسرے درجے کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و} = \text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^2 + ۱} \dots \dots \dots (۴)$$

اگر ما حقیقی ہے تو و کو مثبت مونا چاہئے اور اس لئے اوپر کی علامت یعنی + لے کر

$$\text{پس جنز لا} = \text{لوک } \{ \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + ۱} \} \dots \dots \dots (۵)$$



اسی طرح اگر لا > اتو ہم حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جمن} - لا = لوک \{ لا \pm لا' - ۱ \} \dots \dots \dots (۶)$$

اِس میں دو دونوں علامتیں ممکن ہیں۔ مقداریں لا ± لا' ایک دوسرے سے کی شکافی ہیں اور انکا لوکارتم صرف علامت میں مختلف ہے۔ جمن - لا کی ترسیم کھینچنے پر ظاہر ہو گا کہ ایک سے بڑی لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں۔

$$\text{اب اگر } لا = مسنر ما = \frac{قو - قو'}{قو + قو'} \dots \dots \dots (۷)$$

$$\text{تو } قو' = \frac{لا + ۱}{لا - ۱} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{پس مسنر } لا = \frac{۱}{\frac{لا + ۱}{لا - ۱}} \text{ لوک } \dots \dots \dots (۹)$$

یہ حقیقی ہے صرف جبکہ  $لا > ۱$  ہے۔

$$\text{اسی طرح جمن} - لا = \frac{۱}{\frac{لا + ۱}{لا - ۱}} \text{ لوک}$$

اور حقیقی ہے صرف جبکہ  $لا < ۱$  ہے۔

۴۷۔ مقلوب زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

$$(۱) \text{ اگر } ما = \text{جمن} - لا \dots \dots \dots$$

$$\text{تو } لا = \text{جمن} ما \text{ اور } فر ما = \frac{فر لا}{جمن ما} = \text{جمن} ما = لا + ۱$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{۱}{\frac{لا + ۱}{لا - ۱}} = \frac{فر ما}{فر لا}$$

اِس کوئی شبہ علامت نہیں ہے کیونکہ جمن ما غایت سے مثبت ہے۔

(۲) اگر ما = جنر<sup>۱</sup> لا ..... (۳)

تو لا = جنر<sup>۱</sup> ما اور فرما<sup>۱</sup> = جنر<sup>۱</sup> ما = لا<sup>۱</sup> - ۱

پس فرما<sup>۱</sup> = لا<sup>۱</sup> - ۱ ..... (۴)

ایک سے بڑی لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے لئے

فرما<sup>۱</sup> کی ملائیں مختلف ہیں (لا اور ما کو بدل کر صفحہ (۱۱۲) پر شکل ۲۵ دیکھو)

(۳) اگر ما = مسنر<sup>۱</sup> لا ..... (۵)

تو لا = مسنر<sup>۱</sup> ما اور فرما<sup>۱</sup> = قطنر<sup>۱</sup> ما = ۱ - لا<sup>۱</sup>

اور اس لئے فرما<sup>۱</sup> = لا<sup>۱</sup> - ۱ ..... (۶)

نتیجہ دہندہ ۴۴ مثال ۳ کے موافق ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ما صرف اسی وقت حقیقی ہے جبکہ لا<sup>۱</sup> > ۱ (شکل ۲۶ صفحہ (۱۱۵) پر دیکھو)

اسی طرح اگر ما = مھنر<sup>۱</sup> لا ..... (۷)

تو فرما<sup>۱</sup> = لا<sup>۱</sup> - ۱ ..... (۸)

اگر ما حقیقی ہو تو یہ ضروری ہے کہ لا<sup>۱</sup> ایک سے بڑا ہو۔

اشک ۱۱

۱۔ و<sup>۱</sup> کے سلسلے کو جمع کر کے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{و} = ۱۳۶۷۸۷۹، جنر = ۱۵۴۳۰۰۰۶، جنر = ۱۲۱۷۵۲۰۵۱$$

۲- ثابت کرو کہ  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۳- اگر  $\frac{1}{1512427240} > \frac{1}{1512427240}$  اب ثابت کرو کہ مساوات  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  کی وہ ایک ہی اصل حقیقت ہے۔

۴-  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  کی ترتیبیں کھینچو۔  
۵- ثابت کرو کہ تعامل  $\frac{1}{1512427240}$  (نقطہ) پر غیر مسلسل ہے۔ نیز اس تعامل کی ترتیبیں کھینچو۔

۶- اگر  $\frac{1}{1512427240}$  مثبت ہوں اور  $\frac{1}{1512427240}$  ب ثابت کرو کہ تعامل  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  کی اوپر کی صورت اور نیچے کی مدد ہے۔  
ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

۷- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۸- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۹- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

اور جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۱۰- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۱۱- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

۱۲- جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$  جہن  $\frac{1}{1512427240} = \frac{1}{1512427240}$

$$۱۳- \text{مسئله } \frac{1}{6} = \frac{\text{جنر } ۱}{\text{جنر } ۱ + ۶} = \frac{\text{جنر } ۱}{۷} = \frac{۱ - ۶}{۱ + ۶}$$

$$۱۴- \text{جنر } ۲ = ۶ = ۲ \text{ جنر } ۱ + ۴ \text{ جنر } ۱$$

$$\text{جنر } ۲ = ۶ = ۲ \text{ جنر } ۱ - ۴ \text{ جنر } ۱$$

$$۱۵- ۱ + ۲ \text{ جنر } ۱ + ۲ \text{ جنر } ۲ + ۲ \text{ جنر } ۳ + \dots + ۲ \text{ جنر } ۱۰ = \frac{\text{جنر } ۱}{\text{جنر } ۱ + ۶}$$

مثال ۱۲

ذیل کے تفہیمات کی تصدیق کرو۔

$$(۱) \text{ م } = \text{ ق } \quad \text{ع م} = ۲ \text{ ق}$$

$$(۲) \text{ م } = \frac{\text{ق}}{۲} \quad \text{ع م} = \text{ق} (۲ - \frac{۱}{۲})$$

$$(۳) \text{ م } = \text{ ق جب } \quad \text{ع م} = \text{ج م} \text{ جب }$$

$$(۴) \text{ م } = \text{ ق جب } \quad \text{ع م} = \text{ج م جب }$$

$$(۵) \text{ م } = \text{ ق جب } \quad \text{ع م} = \text{ج م جب }$$

$$(۶) \text{ م } = \text{ ق جب } \quad \text{ع م} = \text{ج م جب }$$

$$(۷) \text{ م } = ۱ \text{ ق} \quad \text{ع م} = (۱ + ۱) \text{ ق}$$

$$(۸) \text{ م } = ۱ \text{ ق} \quad \text{ع م} = (۱ - ۱) \text{ ق}$$

$$(۹) \text{ م } = ۱ \text{ ق} \quad \text{ع م} = (۱ + ۱) \text{ ق}$$

$$(۱۰) \text{ م } = \text{ ق جب } \quad \text{ع م} = \text{ج م جب }$$

(۱۱)	ما = فوجم لا	عفا ما =	فوجم لا - جب لا
(۱۲)	ما = فوجم لا - ۱	عفا ما =	۲ فوجم لا
(۱۳)	ما = جبم لا	عفا ما =	جبم لا
(۱۴)	ما = جبم لا	عفا ما =	جبم لا
(۱۵)	ما = مسنر لا	عفا ما =	۲ جبم لا
(۱۶)	ما = جبم لا + ۱/۲ جبم لا	عفا ما =	جبم لا
(۱۷)	ما = مسنر لا - ۱/۲ مسنر لا	عفا ما =	قطنر لا
(۱۸)	ما = جبم لا + جبم لا + جبم لا	عفا ما =	۲ جبم لا
(۱۹)	ما = جبم لا + جبم لا + جبم لا	عفا ما =	۲ جبم لا
(۲۰)	ما = جبم لا - ۱/۲ جبم لا	عفا ما =	۲ جبم لا
(۲۱)	ما = مسنر لا + جبم لا	عفا ما =	جبم لا + جبم لا

امثلہ ۱۳

ذیل کے تفصیلات کی تصدیق کرو۔

(۱)	ما = لوک لا	عفا ما =	۱ + لوک لا
(۲)	ما = لوک لا	عفا ما =	۱ + ۱/۲ لوک لا
(۳)	ما = لوک جبم لا	عفا ما =	مہم لا
(۴)	ما = لوک جم لا	عفا ما =	میس لا
(۵)	ما = لوک مس لا	عفا ما =	۲ قم لا
(۶)	ما = لوک جبم لا	عفا ما =	ہم لا
(۷)	ما = لوک جم لا	عفا ما =	مسنر لا

- (۸)  $\text{ما} = \text{لوک مستر لا}$  عفا  $\text{ما} = \frac{2}{\text{قن لا}}$
- (۹)  $\text{ما} = \text{نوک} \frac{2}{\text{لا} + 1}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا} + 1)}$
- (۱۰)  $\text{ما} = \text{لوک} \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{2}{\text{لا} - 1}$
- (۱۱)  $\text{ما} = \text{لوک} \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + 1}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا}^2 + 1)}$
- (۱۲)  $\text{ما} = \text{لوک} \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا} - 1)}$
- (۱۳)  $\text{ما} = \text{لوک} \{ \text{لا} + 1 + \text{لا} - 1 \}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{1 - \text{لا}^2}$
- (۱۴)  $\text{ما} = \text{لوک} \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + 1 - \text{لا}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2 + 1}$
- (۱۵)  $\text{ما} = \text{لوک} (\text{لا} - 1) - \frac{1 - \text{لا}^2}{(\text{لا} - 1)}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1 + \text{لا}^2}{\text{لا}(\text{لا} - 1)}$
- (۱۶)  $\text{ما} = \text{لوک} \frac{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}{\text{لا}^2 + \text{لا} - 1}$  عفا  $\text{ما} = \frac{2(\text{لا} - 1)}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}$
- (۱۷)  $\text{ما} = \sqrt{\frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}^2 - 1}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}^2 - 1}}}$
- (۱۸)  $\text{ما} = \sqrt{\frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}^2 - 1}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{2}{\sqrt{\{ \text{لا} + 1 + \text{لا} - 1 \}^2 \text{لا} + 1}}$
- (۱۹)  $\text{ما} = \sqrt{\frac{\text{لا} + 1}{\text{لا} - 1} + \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا} + 1}}$  عفا  $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}(\text{لا} - 1)}$



زیل کے تفقات کی تصدیق کرو۔

$$8- \text{ما} = \text{قطر} - \text{لا} \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{لا} - 1} - \text{لا}$$

$$9- \text{ما} = \text{قمر} - \text{لا} \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{لا} + 1} - \text{لا}$$

$$10- \text{ما} = \text{جب} - \text{لا} (\text{منر} \text{لا}) \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{قطر} \text{لا}}$$

$$11- \text{ما} = \text{سن} - \text{لا} (\text{جبر} \text{لا}) \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{قطر} \text{لا}}$$

$$12- \text{ما} = \text{سن} - \text{لا} (\text{منر} \frac{1}{\text{لا}}) \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{قطر} \text{لا}}$$

$$13- \text{ما} = \text{منر} - \text{لا} (\text{سن} \frac{1}{\text{لا}}) \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{قطر} \text{لا}}$$

$$14- \text{ما} = \text{منر} - \text{لا} (\frac{1}{\text{لا}} + 1) \quad \text{عف} \text{ما} = \frac{1}{\text{لا} - 1}$$





# چوتھا باب

## مشتق تفاعل کا استعمال

۴۸۔ مشتق تفاعل کی علامت سے نتائج۔

اگر ما = فم (لا) اور اگر فم (لا) = ۱ x ۵ (مف ما) ۵ y (تغیروں  
لا) ما کے ہمزاد یا ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو  $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$  کی انتہا  
جبکہ مف (لا) کو لا انتہا کم کر دیا جائے تعریف کی رو سے فم (لا) ہے  
اس لئے انتہا سے قبل ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فم (لا)} + \text{ثما}$$

جہاں ثما بالآخر معدوم ہونے والی مقدار ہے۔

جس طرح سے نسبت  $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$  اپنی انتہائی قیمت کے قریب  
آتی ہے اسکی توضیح کے لئے ایک عددی مثال دلچسپی سے خالی نہیں ہوگی  
لا = ۱ کے قریب یں ما = لوک (لا) کی صورت کو لوہاں انتہائی قیمت ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}} = ۱۴۳۲۹۰ \dots$$

دوسرے کالم کے عدد مطبوعہ جدولوں سے لئے گئے ہیں

مف لا	مف ما	مف لا
۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
۵۰۵۰۰	۵۰۵۰۰	۵۰۵۰۰
۵۰۱۰۰	۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۱۰۰
۵۰۰۵۰	۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۵۰
۵۰۰۱۰	۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۱۰
۵۰۰۰۵	۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۵
۵۰۰۰۱	۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۱

پہلے فرض کرو کہ فہ (لا) کے۔  
چونکہ شہما کی انتہائی قیمت صرف اس لئے مف لا کو کافی طور پر  
پہونچانے سے اس امر کا یقین کریا جاسکتا ہے کہ

فہ (لا) - شہما کے۔  
یعنی (ا) کی رو سے مف ما کی وہی علامت ہوگی جو مف لا کی ہے  
مف لا کی تمام جایز قیمتوں کے لئے جو شوق قیمت میں ایک خاص مقدار  
صہ سے کم ہیں۔

اسی طور پر اگر فہ (لا) > . تو مف ما کی علامت مف لا  
سے مختلف ہوگی مف لا کی ان تمام جایز قیمتوں کے لئے جو مطلق مقدار  
میں ایک خاص مقدار صہ سے کم ہیں۔

اگر متغیر متبوع کو ہندسی طور پر تغیر جائے جیسے شکل وقوعہ امیں اور  
اگر لا = و ہر جہاں ہر ایک نقطہ ہے بہت زیادہ بحث میں تو ہم یہ کہہ سکتے  
ہیں کہ فہ (لا) کے مثبت ہونے کی صورت میں ہر کے دائیں جانب  
ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر فہ (لا) کی قیمت ہر پر کی قیمت

بڑی ہے اور ہر کے بائیں جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل کی قیمت ہر پہلی قیمت سے چھوٹی ہے۔ اگر فہا (لا) منفی ہو تو اس بیان میں الفاظ ”چھوٹے“ اور ”بڑے“ کو باہم بدل دینا چاہئے۔ جب ’ص‘ لا کے وقفہ کے شروع یا آخر میں ہو تو یہ وقفے بالترتیب ہر کے دائیں اور بائیں جانب واقع ہونگے۔

اس سے نتیجہ نکلا ہے کہ اگر فہا (لا) کسی محدود وسعت میں مثبت ہو فہا (لا) کی قیمت لا کے ساتھ اس وقفہ میں استقلال کے ساتھ بڑھتی رہے گی یعنی اگر لا، لا، اس وقفہ میں لا کی کوئی ایسی قیمتیں ہوں کہ لا، لا، تو

فہا (لا)، فہا (لا) کے مطابق قابل تفرق ہے اور اس لئے مسلسل ہے پس وقفہ لا سے لا تک (بشمول طیفین) اس کی بڑی ہے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت ضرور ہونی چاہئے مگر گذشتہ استدلال سے واضح ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت نہ تو وقفہ کی ابتدا میں ہو سکتی ہے اور نہ درمیان میں، اس کو لازماً وقفہ کے آخر پر واقع ہونا چاہئے۔ اسی طرح فہا (لا) کی کم سے کم قیمت کو وقفہ کے شروع میں واقع ہونا چاہئے۔

اسی طرح یہ ظاہر ہے کہ اگر فہا (لا) کسی محدود وسعت میں منفی ہو تو فہا (لا) اس تمام وقفہ میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یعنی اگر اس وسعت میں لا کی کوئی دو قیمتیں لا، لا، ایسی ہوں کہ لا، لا، تو

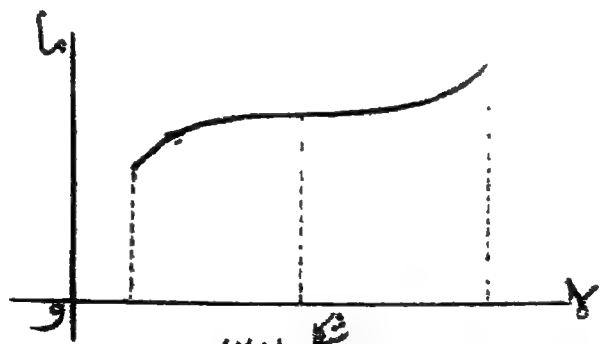
فہا (لا)، فہا (لا) جب ایک تنہی کا ڈھال مثبت ہو تو معین لا کے ساتھ بڑھتے ہیں جب ڈھال منفی ہو تو معین لا کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں مختلف تفاعلوں کی ترتیبوں سے جواب اول میں دی گئی ہیں مذکورہ بالا ان کی توضیح ہوگی۔

اس کے برعکس سانات کہ اگر فہا (لا) کسی وسعت میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ بڑھتا ہو تو اس وسعت میں لا کی کسی قیمت کے لئے

فہم (۱) منفی نہیں ہو سکتا اور اگر فہم (۲) لا کے برعکس سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہو تو فہم (۱) مثبت نہیں ہو سکتا یہ سب بیانات فہم (۱) کی تعریف سے فوراً مندرجہ ہو چکے ہیں۔

نیز اگر فہم (۱) نہ اس لیے غلط ہو کہ محدود تعداد پر منحصر ہے بلکہ ہر ایک باقی ہر جگہ مثبت ہے۔ فہم (۱) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ فہم (۱) فرض کر لو کہ فہم (۱) = ۰ اور سو اسے اس صورت کے باقی و فقیر (۱) = لا سے لا = لا ایک سہولت ہے۔ فہم (۱) مثبت ہے۔ فہم (۱) کی کم سے کم قیمت ۰ پر پہنچنے کے لیے ہو سکتی اور نہ ہی اوپر کے سرے سے لا = لا پر پہنچنے کے لیے لا = لا = لا پر واقع ہونا چاہئے۔ اسلئے

فہم (۱) < فہم (۱) یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر فہم (۱) مثبت ہو لا = لا سے لا = لا تک اور نہ خزانہ کر قیمت کی صورت میں صفر ہوتا ہو



شکل (۲۸)

اسی طرح اگر فہم (۱) اکیلے نقطوں کی حدود تعداد پر صفر ہوتا ہو لیکن باقی ہر جگہ منفی ہو تو فہم (۱) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ مثال ۱۔

$$\begin{aligned} \text{ما} &= \text{جم لا} - (۱ - \frac{1}{\text{لا}}) \\ \text{اس سے} \quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} &= ۱ - \text{جب لا} \end{aligned}$$



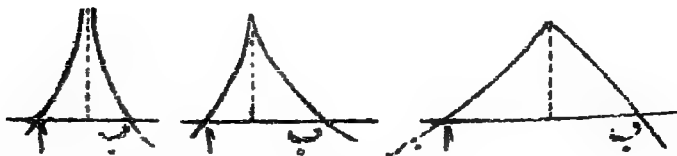
کی نہیں بنائی جائیں تو ان کے تبادلات سے لاکھ قسمیں معلوم ہونگی جنکے لئے  
میں لا = لا

۴۹۔ تفاعل کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کے قفویں مشتق صفر ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) صفر ہوتا ہو لا = لا اور لا = ب کے لئے اور لا = ب کے درمیان  
لا کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (لا) محدود ہو تو لا اور ب کے درمیان لاکھ  
ایک نایک قیمت کے لئے فہ (لا) صفر ہوگا۔

کیونکہ یا تو فہ (لا) سرسبز ہے یا تا بنیں مستقل طور پر صفر ہوگا یا (دفعہ ۱  
کی رو سے) اس وقفہ کے اندر لا کی کسی قیمت لا کے لئے اسکی بڑی سے بڑی یا  
چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوگی یہ دونوں صورتیں فہ (لا) = تمام قفویں اور  
دوسری صورت میں فہ (لا) نہ نہایت ہو سکتا ہے اور منفی (دفعہ ۴۸)  
اس لئے اسے لازماً صفر ہونا چاہیے۔ نیز یہ غرض کہ یہ مطابق یہ محدود ہے۔  
اس مسئلہ کی ہندی تعبیر یہ ہے کہ اگر کوئی منفی محور لا سے دو نقطوں پر  
لے اور منفی کا دھال ہر جگہ محدود ہو تو ان کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور  
ہوگا جس پر کا ماس محور لا کے متوازی ہو۔ مثال کے طور پر دیکھو جب لا  
کی تیسیم صفحہ ۴۲ پر نیز شکل ۹ صفحہ ۲۶۔

یہ احتیاط سے یاد رہے کہ اوپر کے استدلال میں یہ شرط ضروری ہیں کہ  
فہ (لا) اور فہ (لا) میں سے ہر ایک کی تمام دفعہ لا = لا سے لا = ب میں  
ایک معین (اور اس لئے محدود) قیمت ہو جائے۔ ذیل کی اشکال میں مختلف  
صور میں جنکے لئے ایک یا زیادہ شرائط کے نوٹ جائیکے باعث نتیجہ  
قائم نہیں رہتا۔



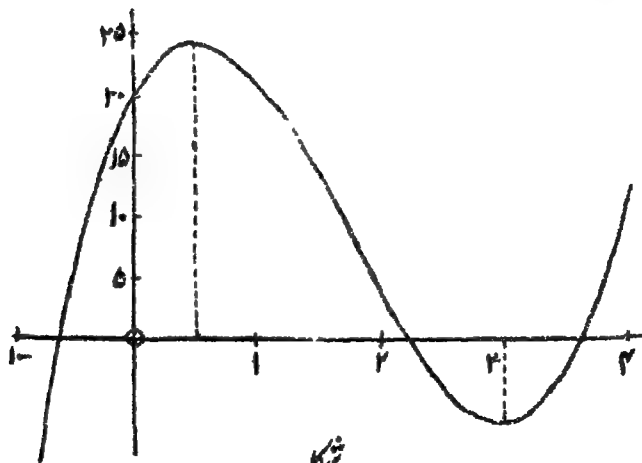


اس سے یہ سیدھا نتیجہ نکلتا ہے کہ  $x = 0$  سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متصل ہے۔  $x = 0$  پر واقع ہوتی ہے۔ یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں پر آ کر جمل کر گئی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر فضا (۱)  $x^3 - 2x^2 + 18x - 20 = 0$  ہو تو

تو فضا (۲)  $x^3 - 2x^2 + 18x - 20 = 0$  کی حقیقی اصلیں  $x = 0$  پر آ کر جمل کر گئی ہیں۔  $x = 0$  سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متصل ہے۔  $x = 0$  پر واقع ہوتی ہے۔ یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں پر آ کر جمل کر گئی ہیں۔

فضا (۲) کی علامات ہیں  $+$   $-$   $+$   $-$  پس فضا (۱) کو اوپر کے وقفوں میں سے ہر ایک میں (دفعہ ۹) ایک دفعہ لازماً صفر ہونا چاہئے۔ اس لئے تین حقیقی اصلیں ہیں، ذیل کی شکل میں فضا (۱) کی ترسیم درج ہے۔



شکل (۳۰)

اگر فضا (۱)  $x^3 - 2x^2 + 18x - 20 = 0$  کی حقیقی اصلیں  $x = 0$  پر آ کر جمل کر گئی ہیں۔  $x = 0$  سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متصل ہے۔  $x = 0$  پر واقع ہوتی ہے۔ یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں پر آ کر جمل کر گئی ہیں۔



اس کی دو اصلیں باہم منطبق کر دی جائیں تو  $\text{فما (لا) = کی (لی) بھی جو اس کے درمیان واقع ہے}$  ان کے ساتھ منطبق ہو جائیگی۔ پس  $\text{فما (لا) = کی (دوسری اصل) فما (لا) = کی (لی) بھی جو اس کے زیادہ عام طور پر فما (لا) = کی (دوسری اصل) کی (لی) کو لا (لی) بنا کر کیا جائے یہ الگ الگ رد اسلوب کے منطبق ہونے سے یہاں ہوتی ہے۔ یہ رد (لا) = کی (د) (درمیانی اصلیں) ہوتی جو منطبق ہوتی ہیں۔ اس سے کسی دی ہوئی جبریہ مسادات کی وضعی اصلیں اگر کوئی مورد زانیہ کے علوم کرنے کا طریقہ اصل ہوتا ہے۔ اگر  $\text{فما (لا) کی (ضعفی اصل) = لا (لی) ہو تو}$$

$\text{فما (لا) = (لا - عم) (ضعف) (لا) ..... (۳)}$

جہاں  $\text{خما (لا) منطوق صحیح تفاعل ہے۔ اس لئے}$

$$\text{فما (لا) = (لا - عم) (خما (لا) + (لا - عم) (خما (لا) )}$$

یعنی  $\text{(لا - عم) (تفاحوں فما (لا) اور فما (لا) کا مشترک جزو ضروری ہوگا۔ اور یہ ظاہر ہے کہ (لا - عم) (مشترک جزو ضروری نہیں ہوگا جب تک کہ فما (لا) (لا - عم) (تقسیم نہ ہو سکے۔}$

پس اگر  $\text{فما (لا) کی کوئی وضعی اصلیں ہوں تو انہیں معمولی جبریہ طریقوں کی مدد سے فما (لا) اور فما (لا) کے مشترک اجزاء ضروری دریافت کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔}$

مثال ۲۔  $\text{فما (لا) = (لا - ۹) (لا + ۳ + ۱۲)}$

$\text{فما (لا) = (لا - ۱۸) (لا + ۳)}$

معمولی جانچ سے حاصل ہوتا ہے کہ  $\text{(لا - ۲) فما (لا) اور فما (لا) کا مشترک جزو ضروری ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (لا - ۲) فما (لا) کا جزو ضروری ہے۔ باقی کے اجزاء آسانی سے معلوم ہو جاتے ہیں، پس}$

$\text{فما (لا) = (لا - ۲) (لا + ۱) (لا + ۳)}$

مثال ۳ - شرط مطلوب ہے کہ کئی مساوات  $لا + ق + لا + ر = ۰$  ..... (۵)

کی دوسری اصل حاصل ہو۔  
دوسری اصل اگر ہو تو اس سے اس مساوات کو پورا کرنا چاہئے

۳  $(لا + ق) = ۰$  یا  $لا = ۰$  یا  $ق = ۰$  ..... (۶)  
(۵) میں درج کرنے سے حال ہوتا ہے

$ر = ۰$  یا  $ق = ۰$  یا  $لا = ۰$  ..... (۷)  
جو مطلوبہ شرط ہے۔

۵ - اعظم اور اصل قیمتیں -

سلسلہ تعامل کی ”اعظم“ قیمت وہ ہے جو ٹری ہو اور ”اصل“ قیمت وہ ہے جو چھوٹی ہو دونوں طرف سے۔  
زیادہ قیمت کے ساتھ اسکے لوں بیان کر سکتے ہیں۔  
ہم  $لا = ۰$  کے لئے اگر دو قیمت مقداریں صہ صہ ایسی معلوم ہو سکیں کہ  $فد (لا)$  یا  $ر = ۰$  سے جو وقفہ  $لا = ۰$  - صہ سے  $لا = ۰$  - صہ کے درمیان میں کسی اور قیمت کے جواب میں  $فد (لا)$  اختیار کرتا ہے۔

چونکہ تعامل کی ایسی قیمتیں ہوں گی جو  $لا$  کے بالکل پاس ہوں اس سے اعظم قیمت ضروری نہیں کہ تعامل کی بڑی سے بڑی قیمت ہو اور اصل قیمت سے چھوٹی۔  
فی الحال ہم بحث کو اس صورت تک محدود رکھیں گے (اور اس کے اندر تمام ضروری اطلاعات شامل ہیں) جہاں وسعت زیر بحث کے تمام نقطوں پر مشتق قابل نقصان اور محدود نہ ہو۔  
دفعہ ۴ کے استدلال سے ظاہر ہے کہ اگر  $فد (لا)$  اعظم یا اصل ہو تو  $فد (لا)$  صفر سے مختلف نہیں ہو سکتا۔

کیونکہ اگر یہ مثبت یا منفی ہو تو لا کی عدین پروس میں ایسے نقطہ سے لے کے  
فہ (لا) بڑا ہوگا اور دوسروں کے لئے چھوٹا ہوگا لہذا اعلیٰ سے کم  
فہ (لا) سے۔ پس صورت مجوزہ میں فہ (لا) کی اعظم یا اقل قیمت  
کے لئے پہلی شرط یہ ہوگی کہ فہ (لا) معدوم ہو۔

یہ شرط ضروری ہے کافی نہیں۔ مزید تحقیق کی خاطر فرض کر دو کہ نقطہ  
لا کے دونوں طرف ایک ایک وقفہ ہے جس کے اندر نہ تو فہ (لا) یا تو بالکل مثبت  
ہے یا بالکل منفی۔ اس کے فرقہ (لا) کے اندر ان تمام نقطہوں  
کے لئے جو لا۔ صبر اور لا کے درمیان واقع ہوں مثبت یا منفی  
[دفعہ ۲۸] اس وقفہ کے اندر استقامت کے ساتھ یہ ہے۔

فہ (لا) وقفہ لا اور لا + صبر کے درمیان لا کی غیر موجودگی سے  
منفی ہو تو فہ (لا) استقامت کے ساتھ اس وقفہ میں بھی جائے گا۔ اگر  
یہ دونوں شرائط پورے ہوں تو فہ (لا) اعظم ہوگا۔  
یہ ظاہر ہے کہ اگر علامات اس طور پر نہ ہوں تو فہ (لا) تفاعل کی  
بڑی سے بڑی قیمت وقفہ لا۔ صبر اور لا + صبر کے درمیان  
نہیں ہو سکتی۔

اسے مختصراً یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر فہ (لا) کے اندر  
شرط کہ فہ (لا) فہ (لا) کی اعظم قیمت ہو تو فہ (لا) کے اندر  
بدلے سے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا بڑھتا بڑھتا  
اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ ضروری اور کافی شرائط کے لئے  
کہ فہ (لا) فہ (لا) کی اقل قیمت ہو یہ ہے کہ فہ (لا) کے اندر  
بدلے سے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا میں سے لڈر سے۔

یعنی ایسی صورتوں کو ہم خارج کر دیتے ہیں جہاں فہ (لا) کسی نقطہ کے  
اند میں لا شامل ہوتا ہے لا تھا بار علامت بدلتا ہے۔ نقطہ لا۔ شمال  
لا واجب لا میں ایک ایسی مثال ہے۔

مندی زبان میں اسے یوں بیان کرتے ہیں۔ جب ایک منحنی کا معین اعظم ہو تو وہ حال کو مثبت سے بدل کر منفی ہو اچھا ہے اور جب معین اقل ہو تو وہ حال کو منفی سے بدل کر مثبت ہو جانا چاہیے۔ اوپر کی اشکال سے اسکی کافی توجہ ہوتی ہے، مثال کے طور پر دیکھو شکلیں ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴۔

جب کسی مشتق تفاعل فیما (۱۱) سے دوسرے توافقی تفاعل فیما (۱۲) کے بڑھنے کی شرح (دفعہ ۲۶) تھوڑی دیر کے لئے صفحہ ہو جاتی ہے اور اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ فیما (۱۲) کی قیمت "مساکن" ہے۔ جیسا پہلے بیان کیا گیا ہے یہ ضروری نہیں کہ مساکن قیمت یا اقل قیمت ہو کیونکہ ایسی صورتیں پیدا ہوتی ہیں جہاں فیما (۱۲) سے فیما (۱۱) کے علاوہ قیمتیں بدلتی ہیں۔

اکثر حسب صورتوں میں مشتق تفاعل فیما (۱۱) مسلسل ہوتا ہے نیز قابل دریافت (اور محدود) مثبت یا منفی قیمت صفحہ سے گذرتے ہی علامت بدل سکتا ہے نیز دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کہ اگر تبدیلیاں ہوں۔ اور۔۔۔ ایک سے زیادہ ہیں تو یہ باری باری واقع ہوگی۔ اس لئے اعظم اور اقل قیمتیں بھی باری باری یا متبادلاً واقع ہوں گی۔ دیکھو شکل ۱۴ صفحہ ۱۲۲

مثال ۱۔۔۔ نظام تقسیم پر ایک ذرہ حرکت کرتا رہا ہے، اس کا فاصلہ میں جو ایک اختیاری مبداء سے ناپنا شروع کیا گیا ہے، اعظم ہوگا جبکہ رفتار (فریٹ) میں اضافہ بدلتی ہے مثبت سے منفی اور اقل ہوگا جبکہ رفتار منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ مثلاً ایک ذرہ جو جاذبہ ارض کے ماتحت اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس کے لئے

$$س = عت - \frac{1}{2} ر^2 \quad \text{فریٹ} = ع - عت$$

فریٹ مثبت سے منفی ہوتا ہے جیسے بڑھتے بڑھتے قیمت  $\frac{ع}{2}$  فریٹ



لا = ا کے لئے فہر (لا) کی اصل قیمت ہے اور لا = ا ہے اور لا = ا کے لئے عظم قیمت = ۱ دیکھو شکل ۱۳ صفحہ ۲۰

مشال ۵۔ فہر (لا) =  $\frac{2}{1-2}$  ..... (۲)

فہر (لا) =  $\frac{2(1+2)}{2(2-1)}$  ..... (۴)

یہاں فہر (لا) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور تفاعل فہر (لا) کی کوئی محدودا عظم اصل قیمتیں نہیں ہوتیں۔ دیکھو شکل ۱۱ صفحہ ۲۹

مشال ۶۔ قائم مستند ریاضی: معلوم کرو جس کا حجم دیا ہوا ہو اور جس کی سطح کا رقبہ کم سے کم ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا نیم قطر ۱۱ اور ارتفاع ۲۱ ہے۔ سطح ہوگی

$$22(11+2) = 22 \times 13 = 286$$

اگر دیا ہوا حجم ۲۲ ہو تو لا = ۲۱

ماکر اس قدر کرنے سے جس جگہ کو اصل بنا ہے وہ ہے لا +  $\frac{2}{2}$  اس کا مشتق

تفاعل ہے ۲ (لا -  $\frac{2}{2}$ ) اور یہ ثابت ہوتا ہے جسے لا قیمت اور میں سے بہتر ہے اور یہ تبدیلی ہے۔ سے + ۲ اور لا = (۲ سے سطح کم سے کم ہوتی ہے اور قبا = ۲ اور نیس اسطوانہ کا ارتفاع ہے سادی ہے۔

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ایسے اسطوانہ کی سطح مساوی حجم کے کرہ کی سطح کا..... ۱۲۷ ۱۲۷ ۱۲۷

مشال ۷۔ تفاعل ح =  $\frac{2(1+2)}{2(2+2)}$  ..... (۸)

کی "کھڑی" یا اصل قیمتیں دریافت کرو۔

(۹)  $\frac{2(1+2)}{2(2+2)}$  = ۱/۲ = ۰.۵

تفرق کرنے اور  $\frac{2}{2}$  کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

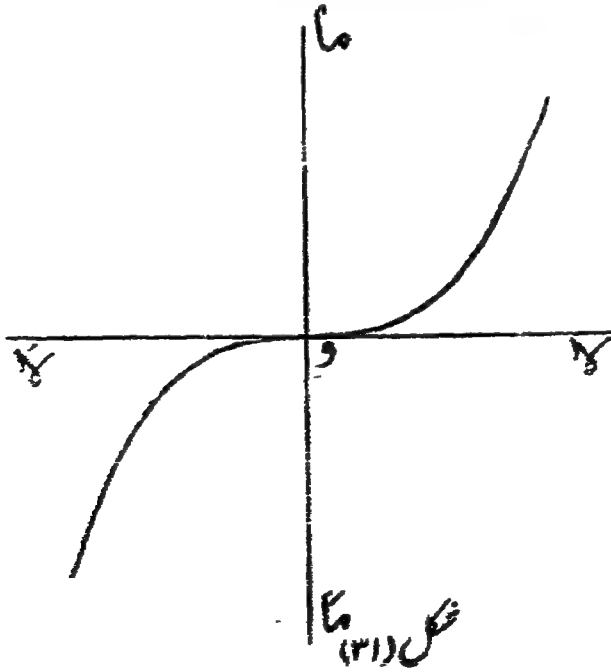
(۱۰) .....  $(\text{لا} + \text{ه}) = \text{ع}$  .....  $(\text{لا} + \text{ه})$   
 لا سے ضرب دیکر (۹) سے منہی کر دے

(۱۱) .....  $(\text{لا} + \text{ب}) = \text{ع}$  .....  $(\text{لا} + \text{ب})$   
 (۱۰) اور (۱۱) کے درمیان ع ساقط کرنے سے لا کی مثل جو قیمتیں ہیں کی مساوات  
 درجہ دوم کی مصلوں کے طور پر حاصل ہوگی

(۱۲) .....  $(\text{لا} + \text{ب}) = \text{ع}$  .....  $(\text{لا} + \text{ب})$   
 بخلاف اس کے اگر لا کو ساقط کیا جائے تو ع کی اہل قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ  
 دوم سے حاصل ہوتی ہیں

(۱۳) .....  $(\text{لا} + \text{ب}) = \text{ع}$  .....  $(\text{لا} + \text{ب})$   
 مثال ۸ - اہل قیمت کی سادہ سے سادہ مثال جو اعظم یا اقل نہیں ہے ذیل کے  
 تفاعل سے حاصل ہوتی ہے

(۱۴) .....  $(\text{لا} + \text{ب}) = \text{ع}$  .....  $(\text{لا} + \text{ب})$

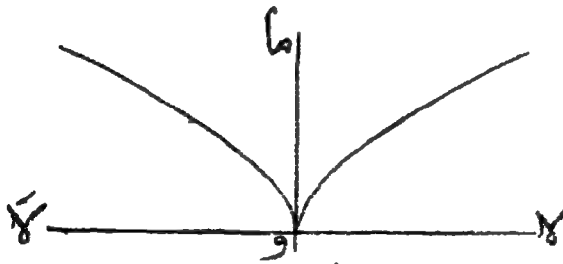


فما (لا) = ۳ (لا) ۲ جولا = ۰۔ کے لئے صفر ہوتا ہے مگر قیمت صفر میں سے بڑھنے سے علامت نہیں بدلتا۔ اس لئے فہ (لا) اگرچہ "مراجل" ہے مگر لا = ۰ کے لئے اعظم یا اقل نہیں ہے۔ شکل ۲۱ میں ۳۱ کی زیر رسم دی گئی ہے۔

۵۔ "مراجل" اور فہ (لا) ایسا ہوتا ہے کہ فہ (لا) عام طور پر مسلسل ہو لا کسی ایک کی قیمت کے لئے غیر مسلسل نہ جاتا، نہ "عدم شناسل" کے ساتھ علامت کی تبدیلی بھی وقوع پذیر ہو جائے لا۔ "مراجل" قیمت زیر بحث میں سے ہو کر گذرے تو پہلے کے استدلال کی بنا پر اعظم یا اقل قیمت پیدا ہوگی۔

مثال ۹۔ اگر فہ (لا) = ۳ (لا) ۲ ..... (۱۵)

تو فہ (لا) = ۳ (لا) ۲ ..... (۱۶)  
جیسے لا قیمت صفر میں سے بڑھتا ہے فہ (لا) - ۰ سے + ۰ تک بدلتا ہے  
اس لئے فہ (لا) اقل ہے لا = ۰ کے لئے۔ دیکھو شکل ۳۲۔



شکل (۳۲)

نیز شکل ۲۹ میں ایک نقطہ واقع ہوتا ہے جہاں فہ (لا) غیر مسلسل ہے اور ایک محدود قیمت سے محدود منفی قیمت کی طرف گذرنا ہے جس میں وہاں اعظم ہے۔

۵۲۔ جبر "مراجل" کے بعض مشہور سوالات خاص جب یہ یہ قابل توجہ ہے کہ اعظم، اقل قیمتوں کے بعض مشہور سوالات خاص جب یہ طریقوں سے بغیر احصا کی مدد کے آسانی حل ہو سکتے ہیں، یہ خاص طور پر دو درجی جنوں کی صورت میں ہے "مراجل" کا طریقہ ان میں پر آسانی



لگ سکتا ہے۔  
 سوالات کا حل ان شرطوں کے ذیل کی مثالوں پر دیکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے  
 (۱)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \{ (لا + ما)^2 - (لا - ما)^2 \}$  .....  
 (۲)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \{ (لا + ما)^2 - (لا - ما)^2 \}$  .....  
 (۳)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \{ (لا + ما)^2 - (لا - ما)^2 \}$  .....  
 پس اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع  $(لا + ما)$  دیا گیا ہو تو ان کا حاصل ضرب  $(لا - ما)$  بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ باہم مساوی ہوں۔  
 اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب  $(لا - ما)$  دیا گیا ہو تو ان کا حاصل جمع  $(لا + ما)$  چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔  
 اگر دو مقداروں کا مجموعہ دیا گیا ہو تو ان کے مربضوں کا مجموعہ کم سے کم ہوگا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔  
 مثال ۱۔ دغہ ۵۱ مثال ۲ میں

$$(لا - ۱) = \frac{1}{2} \{ (لا + ۱)^2 - (لا - ۱)^2 \}$$

چونکہ آخری رقم صفر سے نیچے نہیں جاسکتی اس لئے اس جگہ کی بڑی سے بڑی قیمت  $\frac{1}{2}$  ہے جبکہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \{ (لا + ۱)^2 - (لا - ۱)^2 \}$   
 مثال ۲۔ جملہ  $۲ لا - ۱ = ۲ + لا$  اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے

$$۲ (لا - ۱) = ۳ - لا + ۱ = ۲ (لا - ۱) + \frac{۳}{۲}$$

اس جملہ کی کم سے کم قیمت  $\frac{۳}{۲}$  ہے جبکہ  $\frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \{ (لا + ۱)^2 - (لا - ۱)^2 \}$   
 مثال ۳۔ دئے ہوئے دائرہ میں جو بڑے سے بڑے مستطیل بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔  
 اگر اضلاع  $۲ لا$ ،  $۲ ما$  ہوں تو لا کو اعظم بنانا مقصود ہے اس شرط کے ماتحت کہ  $لا + ما = ۱$  جہاں  $۱$  دائرہ کا نصف قطر ہے۔  
 $۲ لا + ۲ ما = ۲ (لا + ما) = ۲ (۱ - لا) = ۲ (۱ - لا)$   
 جو بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ  $لا = ما$ ، اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا اندرونی مستطیل

مرج ہے۔  
 مثال ۴۔  $\omega$  م ط م ب م س ط م کی کم سے کم قیمت معلوم کرنا۔  
 کی ان قیمتوں کے لئے جو صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان ہوں۔  
 ۱۰۰  $\omega$  م ط م ب م س ط م کا حاصل نہ بے مستقل ہے اس لئے ان کا مجموعہ  
 کم سے کم ہے جب وہ ساری ہوں جیسے چوب۔

م س ط م =  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  اس لئے ہمہ ممکن کم سے کم قیمت ہے  $\omega$  ب م۔  
 مثال ۵۔ گردش کی کافی نما کو اس کے غور پر غور و ارمستی سے کاٹنے سے قطعاً  
 بنایا گیا ہے اس کے اندر جو بڑے سے بڑا اسطوانہ بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔  
 فرض کرو کہ  $\omega$  کافی نما  $\omega$  م =  $\frac{1}{2}$  اور ..... (۴)  
 کو محور  $\omega$  کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے محور کا طول  $\omega$  ہے اور بدلے سے اسطوانہ کے تقریباً  
 سرے کا فاصلہ  $\omega$  ہے۔ اسطوانہ کا حجم ہے

$\pi \omega^2 (r - \frac{1}{2}) = \pi \omega^2 (r - \frac{1}{2})$  ..... (۵)  
 اب مقدار  $\omega$  اور  $r$  اور  $\omega$  ل۔  $\omega$  کا مجموعہ مستقل ہے ان کا حاصل ضرب  
 بڑے سے بڑا ہوگا جب یہ مساوی ہو جینی۔  
 $\omega = \frac{1}{2}$  اور  $r = \frac{1}{2}$  ..... (۶)  
 اس لئے اسطوانہ کی اونچائی تقصیر  $\omega$  اور  $r$  کا نصف ہے۔

۵۳۔ متعدد تغیروں کے اتفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔  
 یہاں سرسری طور پر ذکر کر دیا جائیگا کہ دو یا زیادہ متبوع تغیروں کی صورت میں  
 اوپر کے نتائج کی توسیع کو کرنا ہوسکتی ہے۔  
 سب سے پہلے ہم تقاضا

$\omega = \frac{1}{2}$  اور  $r = \frac{1}{2}$  ..... (۱)  
 کی اعظم اور اقل قیمتوں کے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔



لا، ما چونکہ اس سوال میں لازماً مثبت ہیں اس لئے (۴) سے ظاہر ہے کہ  
توانی السطح کا سطح کی نیچی انتہا ہے۔ اور یہی تحقیق سے ظاہر ہے کہ یہ انتہا نہیں  
پانچویں جب تک کہ شکل مکعب نہ ہو۔

دفعہ ۵۲ کے مطابق کئی سوالوں کا حل مطلوبہ جبری متاثرات سے حاصل ہو سکتا  
ہے مثلاً

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \frac{۱}{۲} \{ (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}) + (\text{ز} + \text{ما} - \text{ی}) + (\text{ی} - \text{لا}) + (\text{لا} - \text{ما}) \} \dots (۵)$$

$$\text{ما} + \text{ی} + (\text{لا} + \text{ما}) = \frac{۱}{۲} \{ (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}) + (\text{ی} - \text{لا}) + (\text{لا} - \text{ما}) \} \dots (۶)$$

یعنی اگر ایک خط مستقیم کو تین حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ان حصوں کے مربعوں کا مجموعہ  
کم سے کم ہوتا ہے جبکہ یہ حصے مساوی ہوں۔

توانی السطح جو ایک دائرہ کے اندر (لا + ما + ی) = ۱ بن سکے اس کی سطح  
زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے جبکہ یہ مکعب ہو۔

۵۲۔ تفرقوں کی ترقیم - دفعہ ۴۸ کی مساوات

$$\frac{\text{مف} \text{ ما}}{\text{مف} \text{ لا}} = \frac{\text{فما} (\text{لا}) + \text{ثما} \dots \dots \dots (۱)}$$

کی طرف پہرہم رجوع کرتے ہیں۔ اسے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\text{مف} \text{ ما} = \frac{\text{فما} (\text{لا}) + \text{مف} \text{ لا} + \text{ثما} \text{ مف} \text{ لا} \dots \dots (۲)}$$

جیسے مف لا، صفر کے قریب آتا جاتا ہے بائیں جانب کی دوسری رقم  
بہنی رقم کے مقابل میں خف اور کم ہو جاتی ہے کیونکہ ثما کی انتہائی قیمت  
مضر ہے۔ اس لئے یہ تقریباً زیادہ صحیح ہوتا جاتا ہے کہ

$$\text{مف} \text{ ما} = \frac{\text{فما} (\text{لا}) + \text{مف} \text{ لا} \dots \dots \dots (۳)}$$

یہ مساوات ان معنوں میں پیدا نہیں ہوتی کہ طرہ فین تقریباً صفر  
ہیں بلکہ اس لحاظ سے کہ طرہ فین کی قیمت ایک کے قریب  
آتی جاتی ہے۔ ان معنوں میں اس مساوات کو اکثر اوقات اس طرح

لکھتے ہیں

فرما = فَمَا (فَمَا) فرما ... کو تفرقہ کر دیا جاتا ہے۔  
صفر ہونے والی مقداروں میں فَمَا کا جو مقام ہے اس کے لحاظ سے اس کو  
"تفرقی سر" کہا جاتا ہے۔

طالب علم اور کے طرز بیان کو ناروا خیال نہ کیے یہ محض دستور بینی  
ہے۔ اس کے استعمال کی غرض صرف یہ ہے کہ جہاں کہیں حسابات میں تفاسیر  
مف لا، مف ما شامل ہوتی ہوں جنہیں بعد میں اتھالی طور پر صفر پر جانا  
ہے ان میں کسی منہل پر مف ما کی بجائے فَمَا (فَمَا) مف لا رکھ دیا  
جاسکتا ہے جبکہ یہ واضح ہو کہ دوسرے رتبہ کی مقداروں کے اظہار اور کر رہے  
آخری جواب کی صحت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

۵۵۔ چھوٹی تصحیحات کا مجموعہ کیا ہے علاوہ اسکے مساوات

مف ما = فَمَا (فَمَا) کو ایک تشریح ضابطہ قرار دیا کہ اس کے تحت  
میں استعمال کیا جاسکتا ہے جہاں کہیں یہ تشریح کے تحت لکھا جائے گا وہاں  
میں تغافل کی قیمت پر اثر صوب لڑا غلوبہ و لیزل جیسا سمجھنے اور  
دیکھنے والی آندہ غلطی یا خطا فَمَا (فَمَا) و لیزل کی محض ایک چھوٹی کسر  
ہوگی جبکہ مف لا نہایت چھوٹا ہو۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ استعمال سے  
کہ کسی عددی نتیجہ میں جو کسی خاص معطیات کی بنا پر حاصل کیا گیا ہو غلطی  
یا خطا کی مقدار معلوم کی جائے جبکہ معطیات سے اندر کی شدتوں اور  
نادرہ کیوں کی مقدار معلوم ہو۔

اور کا طریقہ ایک لحاظ سے ممکن نہیں ہے۔ اس کے تحت  
مقدار کی کوئی نشان دی نہیں سہ کمی و خیر ۱۶۔ کہ شہر سے دور کی جائے گی۔  
وہاں ثابت کیا جائیگا کہ

مف ما = فَمَا (فَمَا) طرہ مف لا

جہاں طہ کوئی مقدار ہے صفر اور ا کے درمیان۔ اس لئے اگر وقفہ لا تا لا + مف لا میں مشتق تفاعل کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں اور جب ہوں تو تقریب (۱) میں خطا کی مقدار (۱-ج) مف لا سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

مثال ۱۔ لوک جیوں کی جدول میں ایک منٹ کے لئے فرق محسوب کرو۔

$$\text{اگر } \text{ما} = \text{لوک جب لا تو } \frac{\text{فرما}}{\text{در لا}} = \text{ما مم لا}$$

۱۱۰ اور مف ما = ما مم لا مف لا تقریباً بشرطیکہ مف لا کو قوسی پیمانہ میں بیان کیا جائے۔ رکھو

$$\text{مف لا} = \text{آ کا قوسی ناپ} = \frac{12}{1.0800} = 5.0002909$$

تو حاصل ہوگا مف ما = 5.0001263 x مم لا  
یہ عددی جزو ضربی اس فرق کے مطابق ہے جو آ کے لئے ۴۵ کے قریب میں جدولوں میں مندرج ہے۔

مثال ۲۔ ایک مثلث کے اضلاع ا، ب اور درمیانی زاویہ ج ناپا گیا ہے اگر زاویہ کی پیمائش میں ذرا سی خطا رہ جائے تو تیسرے ضلع کے محسوبہ طول ج میں خطا معلوم کرو۔

$$\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} - 2 \text{ا ب ج} \text{ جم ج} \dots \dots \dots (3)$$

اس مفروض پر کہ صرف ج اور ج بدلیں

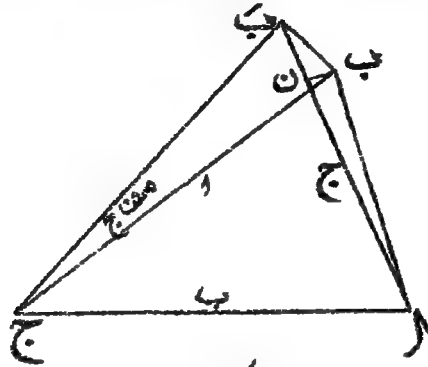
$$\text{ج صف ج} = \text{ا ب جب ج صف ج}$$

$$\text{جس سے مف ج} = \frac{\text{ا ب جب ج صف ج}}{\text{ج}} = \text{ا ب جب ج صف ج}$$

(۴) .....

یہ نتیجہ ہندی طور پر بھی حاصل ہو سکتا ہے، مثلاً اگر شکل میں جب ج ب = مف ج اور ب ن (ج) پر عمود وار کھینچا جائے تو بالآخر

مف ج = ب ن = ب ج ب جم ب ب ن  
 = ا مف ج ج ب ج ب ا = ا مف ج ج ب ب ج  
 دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے اگر قطع نظر کی جائے یہ پرز کے ناپ میں



شکل (۳۳)

ذرا سی غلطی ہو تو اس کے جواب میں ج کے محسوب کرنے میں غلطی ہوگی۔ اے  
 ہم اس مفروض کی بنا پر معلوم کر سکتے ہیں کہ ا ج صرف بدلتے ہیں چنانچہ  
 ج مف ج = (ب ج جم ج) مف ا ج مف ب مف ج مف ا  
 یا مف ج = جم ب مف ا ..... (۳۴)  
 اوپر کے نتیجہ کی طرح اس کا بھی ہندسی ثبوت آسانی سے دیا جاسکتا ہے۔

## ۵۶۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔ نتائج

فل کا مسئلہ نہایت ضروری ہے اور یہ دفعہ ۱۴۴ کے مسئلہ کی توسیع ہے۔  
 اگر تفاعل فم (لا) مسلسل ہو اور اس کا مشتق بعین یا عامل برائت  
 قیمت رکھتا ہو تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک تو

$$\text{فم (ب) - فم (ا)} = \frac{\text{فم (لا)}}{\text{ب - ا}} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں لا، لا کی ایک قیمت ہے ا اور ب کے درمیان۔

$$\text{فما (د)} - \text{فما (د)} - \frac{\text{فما (ب)} - \text{فما (د)}}{1 - \text{ب}} - \dots - (1 - \text{د}) \text{فما (د)}$$

یہ تفاعل شریطان مذکورہ کے ماتحت، لا = لا = لا = ب تک مسلسل ہے اور  
لا کی این پیرود قیمتوں لا = لا = لا = ب کے لئے یہ صفر چوتھا ہے پس  
اس کا متعلق تفاعل

فأ (١) - - - - - فأ (ب) - - - - - فأ (١) - - - - - (٣)

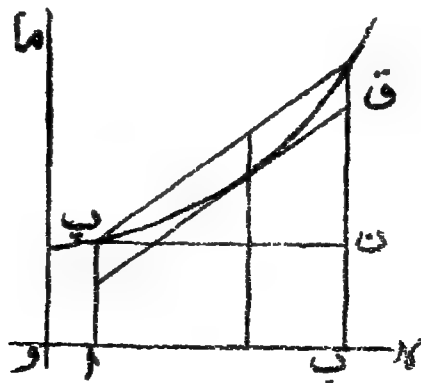
و اب کے درمیان لڑائی کسی ایک قیمت (۱۴) کے لئے لازماً صفر ہوگا۔ اس بیان (۱۵) ثابت ہوتا ہے۔

اس فقیر کا مفہوم اور اس کے ثبوت کی نوعیت قابل ملاحظہ ہے۔ ہندسی تعبیر اس کی حسب ذیل ہے۔ ذیل کی شکل میں

و ا = ر و ب = پ

پ ۱ = فدا (و) ق ۱ = فدا (ب)

اور اس قصبہ =  $\frac{\text{ق ن}}{\text{پ ن}} = \frac{\text{فما (ب) - فما (ا)}}{\text{ب - ا}}$  ..... (۳)



شکل (۳۴)



پس مسئلہ کا مفہوم یہ ہے کہ (قیو و مذکورہ کے با تحت) ب اور ق کے درمیان کوئی ایک نقطہ ایسا ہے کہ جس پر ماس کا فرق (لا) کا ماس و ترب ق کے متوازی ہے۔  
و ترب ق کی مساوات یہ ہے

$$ما = فم (ا) + \frac{فم (ب) - فم (ا)}{ب - ا} (لا - ا) \dots (۵)$$

جس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے اور ظاہر ہے کہ جملہ (۲) منحنی کے معین اور وتر کے متناظر معین کا فرق ہے یہ فرق ب اور ق پر صفر ہوتا ہے پس ب اور ق کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہونا چاہئے جہاں یہ فرق اعظم یا اقل ہو۔

مثال اگر فم (لا) = لا تو  $\frac{فم (ب) - فم (ا)}{ب - ا} = ب + ا$

جو فم (لا) کی قیمت ہے جبکہ لا =  $\frac{۱}{ب + ا}$  (ب) اس بیان کا ہندسی مرادف یہ ہے۔ مکانی کا کوئی وتر اس ماس کے متوازی ہوتا ہے جو وتر کی نصیبت کرنے والے قطر کے سرے پر کھینچا جائے۔

کسر  $\frac{فم (ب) - فم (ا)}{ب - ا}$  یعنی تفاعل کے اضافہ کی نسبت متغیر متبوع کے

اضافہ کے ساتھ اس شرح کا ناپ ہے جسے ہم کسنگے تفاعل کے ”اضافہ کی اوسط شرح“ وقفہ (ب-ا) کے اندر۔ پس اس مسئلہ کا مفہوم یوں بیان ہو سکتا ہے کہ مذکورہ شرائط کے تحت کسی وقفہ میں اضافہ کی اوسط شرح، اسی وقفہ کے اندر کسی ایک نقطہ پر اضافہ کی اصلی شرح کے مساوی ہوگی۔

مثلاً وقت کے کسی وقفہ میں ایک متحرک نقطہ کی اوسط رفتار، اس وقفہ میں کسی ایک آن کی اصلی رفتار کے مساوی ہوگی۔

نتیجہ (۱) کو بیان کرنے کے اور بھی طریقے قابل توجہ ہیں۔ اس امر کو کہ لا اور ب کے درمیان واقع ہے اس طور پر بیان کیا جاسکتا ہے

- (۷)  $لا = ا + ط$  (ج) -  $ا$  ..... (۷)
- جہاں  $ط$  ایسی مقدار ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔  $ط$  کی ٹھیک قیمت بالعموم  $ا$  اور  $ب$  کی قیمتوں پر منحصر ہوگی۔  $ب$  کی بجائے  $ا + ہ$  لکھنے سے مسئلہ اوسط قیمت کی بڑی مفید صورت حاصل ہوتی ہے
- فما (۱ + ہ) - فما (۱) = فما (ا + ط + ہ) ..... (۸)
- یا فما (ا + ہ) = فما (ا) + ہ فما (ا + ط + ہ) ..... (۹)
- اب اگر  $ا$  کی بجائے  $لا$  اور  $ہ$  کی بجائے  $مف$   $لا$  لکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے
- مف فما (لا) = فما (لا + ط + مف) (۱) مف لا ..... (۱۰)
- مسئلہ اقبل سے ایک ضروری استنباط یہ ہے کہ اگر
- فما (لا) = ..... (۱۱)
- لا کی تمام قیمتوں کے لئے جو ایک خاص وقفہ کے اندر ہیں تو فما (لا) اس تمام وقفہ میں مستقل ہوگا۔ کیونکہ اگر فما (لا) بدلتا ہو تو فرض کرو کہ لا کی رویتوں  $ا$ ،  $ب$  کے لئے اثراتی یا مساوی قیمتیں ہیں۔ کسر
- فما (ب) - فما (ا) ..... (۱۲)
- ج -  $ا$
- کی قیمت اس صورت میں صفر سے مختلف ہوگی اور اس لئے ان کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت ہوگی جس کے لئے فما (لا) صفر سے مختلف ہوگا، مگر یہ مفروض کے خلاف ہے۔
- علاوہ اس کے اگر دو تینا عمل  $ا$ ،  $ب$  اور  $پ$  (لا) کے متعلق ایک قیمت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوی ہوں تو وہ صرف لمبا ایک مستقل کے ایک دوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ مفروضہ کی رو سے
- فما (لا) - فما (لا) = ..... (۱۳)
- یا  $\frac{فما (لا) - فما (لا)}{فما (لا) - فما (لا)} = ..... (۱۴)$

اس لئے فہا (لا) - پید (لا) = مستقل  
اگر (۲) کی بجائے زیادہ عام تفاعل لیا جائے یعنی

فہا (لا) - فہا (لا) - پید (لا) - پید (لا) = پید (لا) - پید (لا) - پید (لا) - پید (لا) ..... (۱۶)  
تو اسی طرح کے شرائط کے تحت یہ نتائج ہوں گے کہ اس کا مشتبہ تفاعل

فہا (لا) - فہا (لا) - فہا (لا) - پید (لا) - پید (لا) - پید (لا) - پید (لا) - پید (لا) ..... (۱۷)  
لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو پید کے درمیان ہو۔  
یہ نتیجہ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

فہا (لا + لا) - فہا (لا) = پید (لا + لا) - پید (لا) ..... (۱۸)  
پید (لا + لا) - پید (لا) = پید (لا) - پید (لا) ..... (۱۹)  
اس لئے اگر فہا (لا) = پید (لا) =

تو نہا فہا (لا + لا) = نہا پید (لا + لا) ..... (۲۰)  
پید (لا + لا) - پید (لا) = نہا پید (لا + لا) - نہا پید (لا) ..... (۲۱)  
یہ ضابطہ "متغیرین شکل" سے لے کر "متغیرین شکل" استعمال ہوتا ہے۔

۵۷۔ ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل کا نتیجہ

فرض کرو کہ ع = فہا (لا) - فہا (لا) ..... (۱)  
لا کا مسلسل تفاعل ہے نیز فرض کرو کہ جزوی مشتقات  
جف ع ، جف ع  
جف ع  
جف ع ..... (۲)

بھی لا مانگے مسلسل تفاعل ہیں۔  
مان لو کہ ع کا اضافہ متغیروں کے اضافوں مف ..... کے

جواب میں مف ع ہے یعنی  
 مف ع = فہ (لا + مف لا) + ما + مف ما) - فہ (لا + ما) ... (۳)  
 دفعہ ۳۴ کی ہندی تعبیر کے موافق افعی مستوی لا ما کے نقاط (لا + ما)  
 اور (لا + مف لا) + ما + مف ما کے جواب میں سطح پر جو دو نقطے ہیں مف  
 ان کے ارتفاعوں کا فرق ہے۔  
 اگر صرف لا کو بدلا جائے تو ع کا متناظر اضافہ دفعہ ۵۶ (۱۰) کی رو سے  
 اس شکل کا ہوگا

حپ مف لا ..... (۴)  
 جہاں حپ، لا، ما اور مف لا کا ایک خاص تعامل ہے۔ اسی  
 دفعہ سے اور تیزدی مشتق کے معنی سے ظاہر ہے کہ حپ کی انتہائی قیمت  
 جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جاے حپ ہے جہاں

حپ = جف ع ..... (۵)  
 اگر صرف ما کو بدلا جائے تو ع کا اضافہ ہوگا

ق مف ما ..... (۶)  
 جہاں ق، لا، ما اور مف ما کا ایک خاص تعامل ہے۔ اسی

حپ = جف ع .....  
 اب ہم فرض کرتے ہیں کہ تیزدی مشتق لا، ما سے لا + مف لا، ما + مف ما  
 تک دو منزلوں میں عمل میں آتا ہے، پہلی منزل میں صرف لا اور دوسری  
 میں صرف ما بدلتا ہے۔ تو ع کا عمل اضافہ اس طرح ہوتا ہے

مف ع = حپ مف لا + ق مف ما ..... (۸)  
 جہاں ق، حپ سے اس لحاظ سے مختلف ہے کہ دوسرے تغیر کا ابتدائی  
 نقطہ (لا + ما) کی بجائے اب (لا + مف لا + ما) ہے۔  
 اس سے درستہ میں (۸) کی شکل دریافت کرو جبکہ مف لا، مف ما یکجا

صفحہ کی طرف مائل ہوں جبکہ ان کے درمیان کوئی بمعینہ نسبت قائم ہے۔  
 رکھو  $\text{مف لا} = \text{عہ صہ} \text{مف ما} = \text{بہا صہ} \dots\dots\dots (۹)$   
 جہاں  $\text{عہ}$ ،  $\text{بہا}$  مستقل ہیں اور  $\text{صہ لا}$  انتہائی چھوٹی مقدار ہے۔  
 اس طرح حاصل ہوتا ہے

$\text{مف ع} = \frac{\text{پ عہ} + \text{ق بہا}}{\text{پ عہ} + \text{ق بہا}} \dots\dots\dots (۱۰)$   
 چونکہ مشتقات (۱۲) کے تسلسل کو ہم نے مان لیا ہے اس لئے  $\text{پ اور ق}$   
 بالترتیب انتہائی  $\text{پ}$ ،  $\text{ق}$  کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ  $\text{صہ}$ ،  
 $\text{پس مف لا}$ ،  $\text{مف ما}$  کو جتنا چھوٹا لیں بڑھتے آتے ہیں زیادہ انتہائی طور پر انکی  
 درستی لازم آتی ہے کہ

$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}}{\text{جف لا}} \dots\dots\dots (۱۱)$   
 اور وہ اس لحاظ سے کہ اس کے دونوں جانب کی نسبت انتہائی صورت  
 میں اکائی کے مساوی ہوتی ہے۔  
 اس نتیجہ کو اکثر اس شکل میں بیان کیا جاتا ہے

$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}}{\text{جف لا}} \dots\dots\dots (۱۲)$   
 علامات  $\text{فر لا}$ ،  $\text{فر ع}$ ،  $\text{فر ع کو}$  "تفرقے" کہتے ہیں اور  $\text{فر ع}$ ،  $\text{ع کا کل}$   
 تفرقہ کہلاتا ہے۔  
 اور  $\text{فر ع}$  کا استدلال زیادہ کھول کر لکھا جاسکتا ہے اگر ان مقداروں کی جگہ  
 $\text{پ اور ق}$  سے تعبیر ہوتی ہیں صریحی حملے لکھے جائیں۔ اگر لکھا جائے

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{فہا} (\text{لا، ما})$ ،  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{فہلا} (\text{ما}) \dots\dots\dots (۱۳)$

تو دفعہ ۵۶ کی رو سے

چپ =  $\frac{\text{فہ (لا + مفعلا) مآ} - \text{فہ (لا) مآ}}{\text{مفعلا}}$  =  $\frac{\text{فہ (لا) مفعلا} - \text{فہ (لا) مفعلا}}{\text{مفعلا}}$

ق =  $\frac{\text{فہ (لا + مفعلا) مآ} - \text{فہ (لا) مفعلا}}{\text{مفعلا}}$  =  $\frac{\text{فہ (لا) مفعلا} - \text{فہ (لا) مفعلا}}{\text{مفعلا}}$

جہاں طہا، طہا ایسی مقداریں جو مفعول و یک کے مابین واقع ہیں۔ اسلئے مفعول = فہ (لا + طہا مفعلا) مآ = فہ (لا) مفعلا + فہ (لا) مفعلا مآ

چونکہ دفعہ ۳۴ کی تعریف کے مطابق فہ + فہ مسلسل فرض کئے گئے ہیں مساوات کی انتہائی شکل یہ ہے

مفعول = فہ (لا + فہ مفعلا) مآ = فہ مفعلا مآ  
مساوات (۱۱) سے ظاہر ہے کہ اعظم یا اقل قیمت کے قرب میں ع کا تغیر دوسرے (یا اس سے اعلیٰ) رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے کیونکہ ایسی صورت میں دفعہ ۵۳۔

جف ع =  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف مآ}}$  =  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف مآ}}$  ..... (۱۸)  
پس کسی سطح کے اعظم یا اقل ارتفاع کے نقطہ پر ماسی شہی بالعموم افقی ہوگا۔ جیسا بتایا گیا ہے اس کا عکس لازم درست نہیں۔ دیکھو دفعہ ۵۱۔  
امیر کے مسئلہ کی متبوع متغیروں (لا، مآ، ہی) کی کسی تعداد کے لئے باسانی تو سہ کیا سکتی ہے چنانچہ

مفعول =  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف مآ}} \times \text{مفعلا} + \text{جف مآ} = \text{جف مآ} + \text{جف مآ} \times \text{جف مآ}$  ..... (۱۹)  
بالا خیر۔

۵۸۔ چھوٹی تصحیحاتیں استعمال۔

دفعہ ۵۵ کی طرح دفعہ ماقبل کا مسئلہ چھوٹی خطاؤں کے محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ دفعہ ۵۵ مثل ہی صورت میں اگر دو اضلاع اور دو بیانی زاویہ میں خطائیں بالترتیب مفا + مفا + مفا + مفا جمع ہوں تو ج میں کل خطائیں مساوات سے حاصل ہوگی

$$\text{مفا (ج)} = \frac{\text{جفا (ج)}}{\text{جفا}} \cdot \text{مفا} + \frac{\text{جفا (ج)}}{\text{جفا}} \cdot \text{مفا} + \frac{\text{جفا (ج)}}{\text{جفا}} \cdot \text{مفا} + \frac{\text{جفا (ج)}}{\text{جفا}} \cdot \text{مفا}$$

(۱) . . . . .

اس سے حاصل ہوتا ہے  
ج مفا ج = (ا۔ ب جم ج) مفا + (ا۔ ب جم ج) مفا + (ا۔ ب جم ج) مفا + (ا۔ ب جم ج) مفا  
یا مفا ج = جم ج مفا + جم ج مفا + جم ج مفا + جم ج مفا  
مثال ۲۔ مثلث کا رقبہ کے واسطے اضلاع ا۔ ب۔ ج اور زاویہ زاویہ ج کی بنا پر دیانت کیا گیا۔

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ا۔ ب ج ج} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{لوک } \Delta = \frac{1}{2} \text{لوک ا۔ ب ج ج} \dots \dots \dots (۴)$$

تفیر کرنے سے  $\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\text{مفا}}{\text{ج}} = \frac{\text{مفا}}{\text{ج}}$  (۵)

اس سے "تساوی خطا معلوم ہوگی جسے خطا مفا کے کو جو نسبت کے مندرجہ ذیل ہے وہ معلوم ہوئی ہے۔ تمام بیاناتوں میں غلطی کی علامت ہے۔ معلوم ہوتا ہے ضروری ہے کہ جیسا کہ تسلسلہ غلطی کا۔

دفعہ ۵۶ کی غلطی سے ایک شعوبہ پیدا ہوا ہے اگر غیر بیانات کے کسی مقلد میں جیسا کہ غیر بیانات میں توازن ایک ساتھ لکھ دیا جائے گا کہ ہے۔ اس امر سے ظاہر ہے کہ غلطی کے لئے مفا + مفا + مفا + مفا کی بجائے۔ اس کے لئے درجہ

مثلاً جب زاویہ کے کسی شعوبہ و زاویہ معلوم کرتے ہیں تو جو کے اچھاں کے وجہ سے تیز تر کے باروں کے نامساوی ہوئے کی وجہ سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں انہیں منسوب کر کے جبراً طور پر جمع کر لیا جاسکتا ہے۔ ایسے عمل میں دو مرتبہ درجہ

۵۹۔ تفاعلوں کے تفاعل کا تفق - تفسینی تفاعل کا تفق -

وفد ۵۵ ضابطہ ۱۱۱ کا ایک - مشہور استعمال یہ ہے کہ اسکی روئے تفاعلوں  
تفاعل اور تفسینی تفاعل کا تفق عمل میں آسکتا ہے۔

(۱) اگر  $ع = وف (۱۱۱)$  ..... (۱)

ہمیں (۱۱۱) ایک متغیرات کے معلومہ تفاعل میں تو آخر الامر

مفتا  $ع$  جف فف مفت لا جف فف مفت  
مفت  $ع$  جف لا مفت + جف فف مفت

فرع  $ع$  جف فف فرع لا جف فف فرع  
فرع  $ع$  جف لا فرع + جف فف فرع

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے اب دوم کے کئی نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں پہلی  
ترتیب کے متواتر ہم لے سکتے ہیں

ما = فف (ع، و)

ہاں ۱۱۱ اور ۱۱۱ کے معلومہ تفاعل میں - ضابطہ (۱۱۱) اس طرح ہو جاتا ہے

فرع  $ع$  جف فف فرع لا جف فف فرع  
فرع  $ع$  جف لا فرع + جف فف فرع

مثلاً اگر فف (ع، و) = فرع ..... (۵)

تو جف فف = و جف فف = و اور فرع (ع، و) = و فرع + و فرع  
جف فف = و جف و جف و

جو دفعہ ۳۰ کے مطابق ہے۔

اب اگر فف (ع، و) = و ..... (۶)

تو جف و = و جف و = و لوک ع دفات ۲۱۲۸ کی رو سے

اس کے فرع (ع، و) = و فرع + و لوک ع فرع ..... (۸)



جو دفعہ ۲۵ کے مطابق ہے۔  
(۲) اگر ما، لا کا تثنیسی تفاعل ہو جس کی جیسے اس مساوات سے جوتی ہے

فہ (لا، ما) = ..... (۹)  
تو اس مساوات کو لمباؤ لا کے تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{فہ لا}}{\text{فہ لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{فہ لا}}{\text{فہ لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}$$

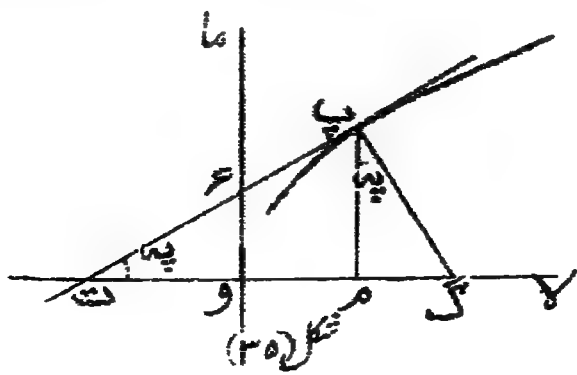
(۱۰) ..... = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}  
یہ دفعہ ۲۵ کے نتیجے کی توسیع ہے۔

۶۰۔ مشتق تفاعلوں کے ہندی استعمال - کارٹینری محدود۔

دفعہ ۲۴ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر وٹس زاویہ کو یہ سے تعبیر کریں جو منحنی  
ما = فہ (لا) ..... (۱) کے کسی نقطہ پر کیا مائٹس (اسکی دائیں جانب کی  
سمت) محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{فہ لا}}{\text{فہ لا}} = \text{مس پہ} \dots \dots \dots (۲)$$

اس ضابطہ کی مدد سے منحنی کے متعلق کئی مقداریں لا، ما اور فہ کی قوم میں بیان ہوگی



اگر نقطہ پ پر کے ماس اور عماد محور لا سے بالترتیب ت اور گ پر ماس اور مین کا پایہ مر ہو تو ت مر کو "زیر ماس" اور مگ کو "زیر عماد" کہینگے۔

زیر ماس ت مر = م پ م پ م = م ا ÷  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۳)

زیر عماد مگ = م پ س پ م = م ا  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۴)

ماس = ت پ = م پ ق م پ م = م ا { ۱ +  $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2$  } ÷  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۵)

عماد = پ گ = م پ ق پ م = م ا { ۱ +  $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2$  } ..... (۶)

نیز ماس کے نقطوے محدودوں کے محرووں پر ہیں

وقت = و م ر ف م = لا -  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ..... (۷)

و ع = ت و س پ م = م ا -  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

مثال ۱۔ کافی م ا = م ا لا ..... (۸)

میں طرفین کو لمبا لا کے تفرق کرنے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

م ا  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  = ۱۲ ..... (۹)

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ زیر عماد مستقل ہے اور طول میں ۱۲ کے مساوی ہے۔

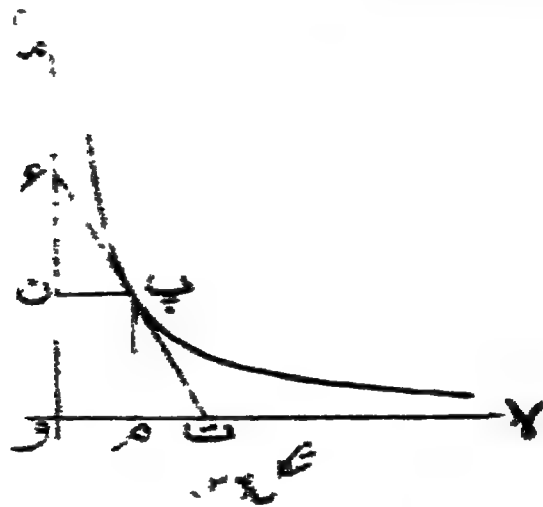
نیز زیر ماس ہے م ا ÷  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  =  $\frac{\text{م ا}}{۱۲}$  ..... (۱۰)

اور اس لئے یہ فصل کا گنا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مبدأ وقت م کی تنصیف کرنا ہے۔

مثال ۲۔ زائد لا م ا = گ آ ..... (۱۱)

$$(۱۲) \dots \dots \dots = \frac{فرما}{خرو} + م =$$

یہ  
پیشہ جودہ سے ماس کے نقطوے محدودین کے محوروں پر ترتیب دیا ماکمل  
ہوئے ہیں اس لئے ہر وقت کی تحیف ترتیب سے ترتیب سے جب تک کہ  
تحیف ترتیب سے یعنی ماس کا جو محدودین کے محور کے اخیر ترتیب سے اگلی  
تقسیم تحیف ہوتی ہے۔



ہر مجموعوں کا حاصل ضرب م لا مایا م ک ہے یہی ہے مثلث وقت ع  
کا بقدر مستقل ہے اور م ک کے مساوی ہے۔

$$(۱۳) \dots \dots \dots = \frac{مشتق}{م} =$$

میں دونوں طرف کے کو کا قریبی اور تفریق کرنے سے

$$(۱۴) \dots \dots \dots = \frac{فرما}{خ} \frac{ن}{م} + \frac{م}{ن}$$

$$ہیں سے ترتیب سے وقت = م = م / فرما / خرو = م / ن = م / م = ۱$$



کے ذریعہ متعین ہو سکتا ہے جہاں محدود ایک ذیلی متغیر کی قوم میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثلاً حرکیات میں متحرک نقطہ کے محدود وقت کے تفاعلوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ اگریت کی قیمتوں کا کوئی موزوں سلسلہ یا جائے تو اس سے لا، ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں، اس طرح منحنی پر اتنے نقطے مرتب ہو سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں۔ مائت کے ایک ساتھ کے اضافے مف لا، مف ما، مف ت ہوں تو

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \div \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} \quad \text{اس لئے اتھسائیں}$$

$$\text{مس پہا} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \div \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \quad (۲) \dots\dots\dots$$

$$\text{مثال ۱۔ ناقص میں لا} = \text{رجم فہ} \div \text{ما} = \text{ب جب فہ} \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{مس پہا} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر فہ}} \div \frac{\text{فر لا}}{\text{فر فہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{مم فہ}} \dots\dots\dots (۴)$$

مثال ۲۔ اگر باذبہ ارض کے ماتحت کوئی شے حرکت کر رہی ہو تو

$$\text{لا} = \text{ر + عت} \div \text{ما} = \text{ب + و ت} - \text{پ ج ت} \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{جس سے مس پہا} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \div \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{و - ج ت}}{\text{ع - ج ت}}$$

۶۲۔ منحنی کے کسی نقطہ پر ماس اور عماد کی مساواتیں۔

$$\text{(۱) منحنی ما} = \text{فہ (لا)} \dots\dots\dots (۱)$$

پیرود نقطہ پ (لا، ما) اور ق (لا + مف لا، ما + مف ما) ہیں، خطاب ق پر کسی اور نقطے کے محدود (ظہا، یہا) ہیں جو ذیل کے رشتہ کو پورا کرتے ہیں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{مف} - \text{لا}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{ما}}$$

یہ - ما =  $\frac{\text{مف} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{لا}}$  (ظہر - لا) ..... (۳) شکل ۱۹ صفحہ ۶۶  
انتہائیں جب 'ق' پ کے پاس آجائے تو اس مساوات کی شکل ہو جاتی ہے

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{\text{فرما}}{\text{فر} - \text{لا}} = \text{یہ} - \text{ما} = \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{فر} - \text{لا}} \dots\dots\dots (۴)$$

جو نقطہ پ کے ماسی خط کی مساوات ہے -  
چونکہ عماد کا ڈھال ماس کے ڈھال کا اوٹا اور غلاست میں مختلف ہوتا ہے اس لئے عماد کی مساوات ہے

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{\text{فرما}}{\text{فر} - \text{لا}} = ۰ = \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{فر} - \text{لا}} + (\text{یہ} - \text{ما}) \dots\dots\dots (۵)$$

(۲) اگر عماد اس شکل میں ہوں

$$(۶) \dots\dots\dots \text{لا} = \text{فہ} - \text{فت} \quad \text{ما} = \text{خہ} - \text{فت} \dots\dots\dots (۶)$$

تو (۲) کی رو سے قاطع پ ق پر

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{مف} - \text{لا}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{ما}}$$

اس لئے پ پر کے ماس کی مساوات ہے

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{فر} - \text{لا}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{فر} - \text{لا}}$$

عماد کی مساوات باسانی حاصل ہوتی ہے

$$(۹) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہر} - \text{لا}}{\text{فر} - \text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فر} - \text{لا}} + (\text{یہ} - \text{ما}) \dots\dots\dots (۹)$$

$$(۱۰) \dots\dots\dots \text{فہ} - \text{فت} = (\text{لا} - \text{ما}) \dots\dots\dots (۱۰)$$

(۳) اگر منحنی کی مساوات اس شکل

میں معلوم ہو تو وفیات ۳۵، ۵۹ کی رو سے

$$(۱۱) \dots \dots \dots \frac{\text{فرما}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} / \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}$$

اس لئے ماس کی مساوات ہے

(۱۲) .... =  $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + (\text{یہ} - \text{ما}) \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$

یہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ مخفی پرپ کے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے

(۱۳) مہ فہ =  $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \text{ مہ لا} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \text{ مہ ما} =$

(۱۴) (۲) کی رو سے مہ لا : مہ ما = ظہ لا : یہ ما ..... (۱۴)

انے نتیجہ (۱۲) حاصل ہو جاتا ہے۔

(۱۵) .... =  $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{یہ ما}}{\text{جف فہ}}$

عباد کی مساوات ہے

مثال ۱۔ مانی ما = ۲ لا ..... (۱۶) میں  $\frac{۲}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}}$  ..... (۱۷)

ماس کی مساوات ہے یہ ما =  $\frac{۲}{\text{ما}} (\text{ظہ لا})$  ..... (۱۸)

جو (۱۶) کی رو سے معمولی شکل میں آتی ہے ما یہ = ۲ (ظہ لا) ..... (۱۹)

مثال ۲۔ اگر محدود اس شکل میں دئے گئے ہوں لا = رت ما = ۲ رت ..... (۲۰)

تو ضابطہ (۸) سے ماس ملتا ہے  $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{ت}} = \text{یہ ما} - \text{ما}$  ..... (۲۱)

اور اس کی مزید تبدیل اس شکل میں ہوتی ہے

(۲۲) .... =  $\frac{\text{ظہ}}{\text{ت}} + \text{رت}$

عماد کی مساوات ہے (ظہ - لا) (ت + دیم - ما) = ..... (۲۳)  
یا ت ظہ + دیم = روت + روت ..... (۲۴)  
چونکہ ت میں یہ تیسری درجہ کی مساوات ہے اس لئے کسی اختیاری نقطہ (ظہ + دیم) سے تین  
حقیقی یا خیالی عماد نکالے جاسکتے ہیں۔

مثال ۳۔ مرکز دار فخر دہلی (لا + ر + ہ) (ما + جب + ما) = ..... (۲۵)  
کے کسی نقطہ پر ماس کی مساوات (۱۲) کی رو سے ہے۔

(ظہ - لا) (لا + ہ + ما) + (دیم - ما) (ہ + لا + جب + ما) = ..... (۲۶)

یا (لا + ہ + ما) ظہ + (ہ + لا + جب + ما) دیم = ..... (۲۷)

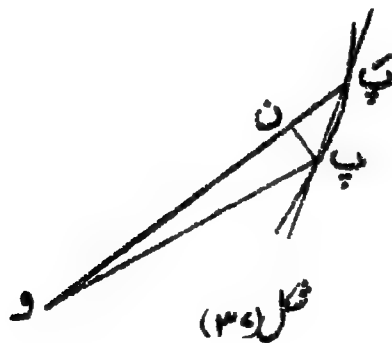
۶۳۔ قطبی مجدد۔ فرض کرو کہ سنہی پر دو پاس کے نقطے پ' پ' ہیں

پ' اور پ' کے قطبی مجدد (ر' ظہ) اور پ' کے (ر + م ف + ر' ظہ + م ف ظہ)

پ' پ' کو ملا دو اور و پ' پر عمود پ' ن نکالو تو

پ' ن = و پ' جب پ' و ن = ر جب م ف ط

پ' ن = و پ' - و ن = ر + م ف ر - ر جب م ف ط = م ف ر + (ر - ا - جم م ف ط)

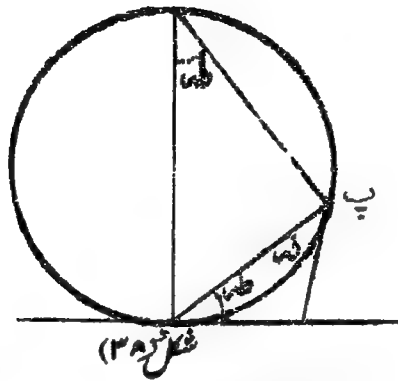


۱۲۴ جب م ف ط لا انتہا کم ہو تو جب م ف ط کی نسبت م ف ط کے ساتھ  
انتہا میں ایک ہو جاتی ہے اور ۱ - جم م ف ط = ۲ جب م ف ط





اور اس لئے  $\frac{1}{r} = \frac{فرقطب}{مہم طہا جس سے مہم فہا} = مہم طہا یا فہا = طہا$   
(۵).....



مثال ۲ - جب ایک منحنی کا سمتی نیم قطر عظم یا اتل ہو تو یہ منحنی کا عماد ہوتا ہے کیونکہ اگر

$$\frac{فرقطب}{مہم طہا} = ۰ \text{ تو مہم فہا} = ۰ \text{ یا فہا} = \frac{فرقطب}{۰}$$

مثال ۳ - اگر ایک منحنی کے عماد سب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں تو منحنی کو لانا دائرہ ہونا چاہئے۔

اگر ثابت نقطہ کو قطب لیا جائے تو مفروض کی رو سے فہا =  $\frac{فرقطب}{r}$  اور اس لئے  $\frac{فرقطب}{مہم طہا} = ۰$  طہا کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اس لئے  $r =$  مستقل۔

### مشکلہ ۱۵

۱ - دفعہ ۴ کے سئلہ کی ذیل کی صورتوں میں تصدیق کرو۔

$$(۱) \text{ فہا } (لا) = (لا - لا) (لا - لا) (لا - لا) (لا - لا)$$

$$(۲) \text{ فہا } (لا) = \text{لوک} \frac{لا + لا}{(لا + لا)}$$

$$(۳) \text{ فہا } (لا) = \frac{(لا - لا) (لا - لا) (لا - لا) (لا - لا)}{لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ منحنی  $\text{ما} = \text{لا}^2 - ۶\text{لا} + ۹$  اور  $\text{لا} = ۱۲$  اور

$$\text{ما} = \text{لا}^2 - ۶\text{لا} + ۵ = ۲$$

محور کا کوسس کرتے ہیں اور معلوم کر دوں گے کہ اسے تینہ بیرونی نقطیات کو مرسم کرو۔

۳۔ جب  $\text{لا}$  بڑھتے بڑھتے  $\text{فما} (\text{لا}) =$  کی کسی ایک اہل میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ گزرنے سے عین پہلے  $\text{فما} (\text{لا})$  اور  $\text{فما} (\text{لا})$  کی مختلف علامتیں ہونگی اور گزرنے کے عین بعد ایک ہی علامت۔ کیا دوسری اہل کی صورت میں بھی یہ درست

۴۔ اگر  $\text{لا} < \text{لا}$  کیونے  $\text{فما} (\text{لا}) = \frac{\text{لا}^2}{۲} - ۱$

اور  $\text{لا} < \text{لا}$  کیونے  $\text{فما} (\text{لا}) = ۱ - \frac{\text{لا}^2}{۲}$

لیکن  $\text{لا} = \text{لا}$  کیونے  $\text{فما} (\text{لا}) = ۰$

تو ثابت کرو کہ  $\text{فما} (\text{لا})$ ،  $\text{فما} (\text{لا})$  دونوں مسلسل ہیں  $\text{لا} = ۰$  سے  $\text{لا} = \infty$  تک۔

منحنی  $\text{ما} = \text{فما} (\text{لا})$  کو مرسم کرو۔

۵۔ مساوات  $\text{لا}^2 - ۱۲\text{لا} + ۱۶ = ۰$  کا دوسری اصولوں کے لئے معائنہ کرو۔  
بائیں طرف کی ترسیم کا حصہ کھینچو۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنی  $\text{ما} = \text{لا}^2 - ۸\text{لا} + ۸$  اور  $\text{لا} = ۴$  محور کا کوسس کرتے ہیں اور دیکھو کہ اسکو کہاں کا شیبہ ہے۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر منحنی کا عماس نقطہ  $\text{لا} + ۸ = ۰$  کے متوازی ہے۔ معنی کا خاکہ کھینچو۔

۷۔ سرور  $\text{ا}^2$ ،  $\text{ب}^2$ ،  $\text{ج}^2$  کو معلوم کرو کہ منحنی

$$\text{ما} = (\text{لا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2) + ۲$$

نقطہ  $(۲، ۸)$  میں سے گزرے، محور کا کو نقطہ  $(۰، ۲)$  پر سس کرے اور اس نقطہ پر جہاں  $\text{لا} = ۱$  اس کا عماس محور کا کے متوازی ہو۔

۸۔ ثابت کرو کہ جملہ  $(\text{لا} - ۱) + ۱$  لاک کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔

۹۔ ثابت کر دو کہ جب  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کے درمیان واقع ہوتا ہے اور جم  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کر دو کہ اگر  $\frac{1}{4} > 1$  تو لوک  $(1 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۱۔ ثابت کر دو کہ اگر  $\frac{1}{4} > 1$  تو مس  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

### امثلہ ۱۶

#### (اعظم اور انسل قیمتیں)

۱۔ ثابت کر دو کہ نقطہ کی مستقیم حرکت میں رفتار زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم ہوگی جبکہ اسرار عظامت بدلے۔

سادہ موسیقی حرکت میں = رجم ننت سے اسکی توضیح کرو۔

۲۔ تفاعل  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ ثابت کر دو کہ تفاعل  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو جبکہ  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 3$  اور اقل ہے جبکہ  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 3$ ۔

۴۔ تفاعل  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کی کوئی اعظم اقل قیمتیں نہیں۔

۵۔ تفاعل  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  کے اقل نقطے دریافت کرو اور اس کا معائنہ کر دو کہ تفاعل کن کے لئے اعظم یا انسل ہے۔



جیکہ لا = ساراب

۱۷- ثابت کرو کہ تفاعل  $\frac{1}{2} (لا - لا) + \frac{1}{2} (لا - لا) + \dots + \frac{1}{2} (لا - لا)$  من (لا - لا) اقل ہے جیکہ لا =  $\frac{1}{2} (لا - لا) + \frac{1}{2} (لا - لا) + \dots + \frac{1}{2} (لا - لا)$

۱۸- طول لا کی لہروں کی رفتار گہرے پانی پر  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  کے تناسب

ہے جہاں لا ایک خاص خطی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ رفتار کم سے کم ہوگی جیکہ لا = ۱۔

۱۹- داخلی جہاز کو پانی کے اندر دھکیلنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ رفتار کے مکعب کے موافق بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رو کے خلاف نہایت کفایت کے ساتھ جہاز چلانے کی شرح وہ رفتار ہوگی جو رو کی رفتار کا  $\frac{1}{2}$  اگنا ہو۔

۲۰- دی ہوئی برقی رو کو ایک برقی اسٹیشن سے دوسرے تک تانبے کے تار کے ذریعہ لیجا نا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم لاگت والا تار کا قطر وہ ہوگا جس سے کرل لاگت کا سودا اس توانائی کی مقدار کے مساوی ہو جو تار کے گرم کرنے میں ضائع ہوتی ہے۔ [توانائی کے ضائع ہونے کی شرح عمودیت اش کے بالعکس متناسب ہے]

۲۱- داخلی جہاز کے روزانہ اخراجات غروری کی اجرت، اہل کے سود اور کوئلہ پر مشتمل ہیں۔ کوئلہ کے خرچ کی شرح کی شرح ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار کا مکعب، ثابت کرو کہ اگر سفر کو کم سے کم لاگت والی رفتار کے ساتھ طے کیا جائے تو کوئلہ کی لاگت غروری کی مقدار اور سود کے نصف کے مساوی ہوگی۔

۲۲- دو داخلی جہازوں میں سے ایک بیدار گاہ کی طرف جا رہا ہے دوسرا ٹھیک اس بیدار گاہ سے باہر جا رہا ہے ان کے راستے ایک دوسرے سے زاویہ ۹۰° بناتے ہیں اور ان کی رفتاروں کی نسبت ۱:۲ ہے۔ ثابت کرو کہ ٹھیک اس آن میں جبکہ وہ ایک دوسرے کے قریب سے قریب ہوں بیدار گاہ سے ان کے فاصلے نسبت ۴:۵ میں ہیں۔

۲۳- نصف قطر کے دائرہ میں برقی رو ہے اسکی وجہ سے جو قوت ایک

چھوٹے متقاطیس پر جس کا محور دائرہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اشرانداز ہوتی ہے وہ ایسے  
 ہوتی ہے جیسے  $\frac{لا}{(لا + لا)}$  جہاں لا متقاطیس کا فاصلہ ہے دائرہ کی استوی سطح  
 ۲۳۔ ثابت کرو کہ قوت زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ  $لا = \frac{1}{2}$ ۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ جملہ  $اجم ط + ب جب ط$  کی انتہائی قیمتیں  $\pm لا + ب$  ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ جب  $(ط - ع)$  جم  $(ط - ب)$  اعظم ہے یا اقل جبکہ  
 $ط = \frac{1}{2} (ع + ب) + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi$

اورن بالترتیب جفت ہو یا طاق۔  
 ۲۶۔ رقاص کا میلان انتصابی خط کے ساتھ جبکہ ہوا کی مزا سمت کو ملحوظ رکھا جائے

اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے  $ط = لا$  قوت جم  $(ن + ص)$  ثابت کرو کہ  
 بڑے سے بڑے اہتساز وقت کے مساوی و تفول  $\frac{\pi}{2}$  کے بعد پیدا ہوتے ہیں اور ایک  
 گھنٹے والا ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۷۔ منحنی  $ما = لا$  قوت کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کو قسم کرو۔

۲۸۔ منحنی  $ما = لا$  لوک  $لا$  کا اقل معین۔ ..... ہے۔ منحنی کو قسم کرو

۲۹۔ ثابت کرو کہ ایک عدد لا کے لوکارتم کی نسبت اس عدد کے ساتھ بڑی  
 سے بڑی ہوتی ہے جبکہ  $لا = ھو$ ۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ اگر  $لا < ب$  تو جملہ  $اجم لا + ب$  جنس لا کی اقل قیمت

لاؤ۔ ب ہے لیکن اگر  $لا > ب$  تو اس کی قیمت نہ اعظم ہوگی نہ اقل۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ تفاعل جم  $لا + جم لا$  کی اقل قیمت ہوگی جبکہ  $لا = ۰$ ۔

لیکن اور کوئی اقل یا اعظم قیمت نہیں ہوگی۔  
 ۳۲۔ ثابت کرو کہ تفاعل جم  $لا + جم لا$  کی اعظم قیمت ہوگی جبکہ  $لا = ۰$ ، اقل

قیمت ہوگی جبکہ لا =  $\frac{5}{11}$  تقریباً، اور باری باری سے اعظم اذریال قیمتوں کا  
ایک سلسلہ ہوگا جبکہ لا =  $\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}$  تقریباً جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$   
۳۳۔ تفاعل جمن لا + جمن لا کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔  
+ جمن لا جمن لا

## امثلہ ۱

### ہندسی سوالات

- ۱۔ دئے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔
- ۲۔ دئے ہوئے محیط والا مستطیل جس کا قطر چھوٹے سے چھوٹا ہو مربع ہے۔
- ۳۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک دئے ہوئے مثلث میں بن سکتا ہے رقبہ میں مثلث کا آدھا ہوتا ہے۔
- ۴۔ مثلث قائم الزاویہ کے اندر ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اس کا ایک زاویہ زاویہ قائم پر منطبق ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ متقابل کا کونہ دترگی تعصیف کرے۔ ثابت کرو کہ مذکورہ حالات کے ماتحت مستطیل کا محیط نہ تو اعظم ہوگا نہ اقل۔
- ۵۔ بڑے سے بڑا یا کم سے کم محیط والا مستطیل معلوم کرو جو ایک دئے ہوئے دائرے کے اندر بنایا جاسکتا ہے۔
- ۶۔ دائرہ کے اندر ایک دئے ہوئے نقطہ (میں سے ایک وتر (ق) کھینچی گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں (پ) اور (ق) کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ وتر (میں سے گذرنے والے قطر پر عمود وار ہو اور زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے جبکہ وتر قطر پر منطبق ہو۔
- ۷۔ ایک ثابت خط مستقیم اور دو ثابت نقطے (ب) خط کے باہر معلوم ہیں، خط کے اندر ایک ایسا نقطہ (پ) دریافت کرنا مطلوب ہے کہ (پ) + (پ) اقل ہو۔



۸۔ کم سے کم رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے اندر بنایا جاسکتا ہے اور ٹیڑھے سے ٹیڑھے رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے گرد بن سکتا ہے۔

(ایک) قطعہ کا قاعدہ ہے۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو ثابت کر دو کہ ایک یا مضلعی (ایک ق) جب قطعہ دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے

اَب = يِق = قِب

۱۰۔ ایک خط مستقیم نقطہ (ا و ب) میں سے کھینچا گیا ہے اور محدودوں کے (علی القوائم) محوروں کو بالترتیب چپ اور قی پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ وحی + وق کی اہمیت ۱ + ۲ + ا و ب + ب ہے۔

۱۱۔ ایک خط مستقیم ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ کم سے کم طول جو محاذوں کے درمیان کی دیر تعلق ہے وہ (ا، ب + ب، گ) ہے۔

[مجموعہ علی القوائم]۔

۱۲۔ دعات کی مستطیلی چادر کے کونوں سے چار سادی مرہے بٹھا دیے گئے  
 ہیں اور اضلاع کو اوپر موڑنے سے ایک کھلم مستطیلی صندوق بنایا گیا ہے، ثابت کرنا کہ  
 جب تک دعات اندر کا حجم زیادہ سے زیادہ ہو تو اس کی گہرائی ہوگی

۱۔ ا + ب = [ا + ب + ب] جہاں ا + ب ابی مستطیل کے اضلاع ہیں

ایک مکان کی دیوار پر ایک ۵ فٹ اونچی لکڑی ہے اور اس کی دہلیز زمین سے ۵ فٹ کی اونچائی پر ہے۔ بتاؤ کہ ایک شخص جس کی آنکھ زمین سے ۵ فٹ اونچی ہے دیوار سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہو کہ کھڑکی کے سامنے اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا نقاب لگا دے۔

۱۴۔ درخت کے استخوانی تنے سے مستطیلی تراش کا ایک شبہیہ کاٹنا مقصود ہے جس کے جھکاؤ کی اس توارمی زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ تراش کا عرض قطر کا نصف ہونا چاہیے اور اس کی گہرائی قطر کی ۱/۶ گنا ہونی چاہئے۔

(یہ مان لیا جائے کہ جھکاؤ کی استواری ایسے بدلتی ہے جیسے عرض اور گہرائی کا کعبہ)  
 ۱۵۔ ایک چراگاہ سے کنارے کے ساتھ ساتھ ایک سیدھی شریک ہے اور چراگاہ کے ایسے مقام پر ایک شخص ہے جو شریک سے کچھ ترین نقطہ سے ایک میل کے فاصلہ پر ہے۔ وہ کم سے کم وقت میں شریک کے ایک در کے مقام تک جانا چاہتا ہے اگر چراگاہ اور شریک پر اس کے چلنے کی رفتاریں بالترتیب ۴ اور ۵ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُسے شریک سے ایک ایسے مقام پر جا ملنا چاہئے جس کا فاصلہ اس سے  $\frac{1}{2}$  میل ہے۔

۱۶۔ ایک کمرہ کی دیوار پر روشنی کا بعد ازین سے کئی ماونجائی پر لگا یا جائے کہ فرش کے ایسے نقطہ جس کا فاصلہ دیوار سے  $\frac{1}{2}$  ہے روشنی کی چمک زیادہ سے زیادہ ہو۔ (یہ مان لیا جائے کہ کسی سطح پر روشنی کی چمک ایسے بدلتی ہے جیسے بعد اسے فاصلہ کے مربع کا عکس، نیز ایسے بدلتی ہے جیسے اس کا دوری، جب التمام جو شعاعیں سطح کے عادی کے ساتھ بناتی ہیں)۔

۱۷۔ دو ذرے جب اذرق مستقل رفتاروں سے دو کے ساتھ دو ثابت میدان خطوں پر حرکت کرتے ہیں، یہ خط باہم و قطع کرتے ہیں اگر ایک ہی وقت میں ذروں کے مقامات (ا) اور (ب) ہوں اور اگر (ا) = (ا) و (ب) = (ب) اور (ا) و (ب) = بعد تو فاصلہ (ب) ق کم سے کم ہوگا وقت

$$۱۶ + ۲۰ = ۳۶ \text{ (ا و ب) } \text{ جم } ۳۶ \text{ کے بعد } ۱۰۰ \text{ کم سے کم فاصلہ ہوگا}$$

$$۱۶ + ۲۰ = ۳۶ \text{ (ا و ب) جب } ۳۶$$

$$(۱۶ + ۲۰ = ۳۶ \text{ جم } ۳۶ + ۱۰۰)$$

۱۸۔ ایک قطعو مکانی ایک ایسے وتر سے گزرا ہے جو خود پر عمود دار ہے۔ اس کے اندر بڑے سے بڑا مستطیل بنانا مقصود ہے ثابت کرو کہ اس کا طول نقطہ کے طول کا  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۱۹۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک قطع ناقص کے اندر بن سکتا ہے اس کے قطر مساوی مزدوج قطروں پر منطبق ہو سکتا ہے۔

۲۰۔ اگر ناقص کے پاس کا طول جو محوروں کے درمیان کٹتا ہے کم سے کم ہو تو حماس کا نقطہ حماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتی ہے جو بالترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۱۔ قطع ناقص کا حماس، مخروطی محوروں کے ساتھ تقاطع سے کم سے کم رقبہ والا مثلث پیدا کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ حماس ناقص کے مساوی مخروطی نظروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہے۔

۲۲۔ دائری قطع کا محیط دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ قطع کا زاویہ ۲ نیم قطری ہو اور اس صورت میں رقبہ نیم قطر کے مربع کے مساوی ہوگا۔ ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے، اگر باقی دو اضلاع کا مجموعہ معلوم ہو تو رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ اضلاع مساوی ہوں۔

۲۳۔ ایک بیاضلعی کے چاروں اضلاع ایک خاص ترتیب میں دیے گئے ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا اگر یہ دائرہ کے اندر بن سکے۔

## مثله ۱۸

[ذیل کے نتائج مان لئے جائیں۔

(۱) قائم دائری اسطوانہ کا نصف قطر اور ارتفاع  $c$  ہے، اس کی منحنی سطح  $2\pi r c$  ہوگی (۲) اس کا حجم  $\pi r^2 c$  ہوگا۔

(۳) قائم مستطی مخروط کا ارتفاع  $c$  اور قاعدہ کا نصف قطر اور ابل ضلع  $l$  ہے۔ اس کی منحنی سطح  $\pi r l$  ہوگی (۴) اس کا حجم  $\frac{1}{3} \pi r^2 c$  ہوگا۔

(۵) مخروطی قطر اس کی سطح  $\pi r l$  ہوگی (۶) اس مخروط کا حجم  $\frac{1}{3} \pi r^2 c$  ہوگا۔

۱۔ بڑے سے بڑے حجم کا اسطوانہ جو ایک دے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے کرہ کے حجم کا  $\frac{2}{3}$  ہوگا۔

۲۔ بڑے سے بڑے سطحی رقبہ والا اسطوانہ جو ایک دے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے اس کی سطح کرہ کی سطح کی  $\frac{2}{3}$  ہوگی۔

۳۔ بڑے سے بڑے حجم والا اسطوانہ جس کا سطحی رقبہ دیا ہوا ہے وہ ہے جس کا

ارتفاع قاعدہ کے قطر کے مساوی ہو اور اس کا حجم اس کرہ کے حجم کا  $\frac{1}{4}$  ہوگا۔  
۴۔ جس کا سطحی رقبہ وہی ہو۔

۵۔ دئے ہوئے حجم کے لئے کم سے کم سطح والا اسطوانہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس سطح کی نسبت مساوی حجم کے کرہ کی سطح کے ساتھ  $\frac{1}{4}$  اسپت۔

۶۔ کھلے اسطوانی ظرف کے ابعاد کی نسبت معلوم کرو کہ دئے ہوئے حجم کے لئے اسکی بناوٹ میں مسالہ کی مقدار کم سے کم صرف ہو۔ [اس کا ارتفاع قاعدہ کے نصف قطر کے مساوی ہونا چاہئے۔]

۷۔ قائم مستدیر مخروط کے اندر ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اس کا حجم اعظم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا  $\frac{1}{2}$  ہو اور اس کا حجم اس وقت مخروط کے حجم کا  $\frac{1}{4}$  ہوگا۔

۸۔ ایک اسطوانہ ایک قائم مستدیر مخروط کے اندر بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ اسکی منحنی سطح اعظم ہوگی جبکہ اسطوانہ کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا  $\frac{1}{2}$  ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کلی سطح کی اعظم قیمت نہیں ہو سکتی اگر مخروط کا نیم زاویہ  $26^\circ 34' 20''$  [سن  $\frac{1}{2}$  سے بڑا ہو۔]

۹۔ دئے ہوئے کرہ کے اندر جو  $\frac{1}{2}$  سے بڑے حجم والا مخروط بنایا جاسکتا ہے اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروط کی منحنی سطح ارتفاع کی اسی قیمت کے لئے اعظم ہوگی۔

۱۰۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد قائم مستدیر مخروط بنایا جائے تو اس کا حجم کم سے کم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ نیم زاویہ  $26^\circ 34' 20''$  [جب  $\frac{1}{2}$  یا ہوگا۔]

۱۱۔ اگر قائم مستدیر مخروط کا حجم مستقل رکھ جائے تو سطح زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ ارتفاع قاعدہ کے قطر کا  $\frac{1}{2}$  ہوگا۔

۱۲۔ دھات کی گول چادر سے ایک قطاع دائرہ کا ٹیٹا مقصود ہے کہ باقی حصہ ایک مخروطی ظرف بن سکے جس کی گنجائش زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ قطب کا زاویہ  $94^\circ$  ہونا چاہئے۔

۱۳۔ کھلے مستطیلی تالاب میں پانی کا دیا ہوا حجم آسکنا چاہئے۔ بتاؤ کہ اس کے ابعاد کے

تناسب کیا ہوں کہ سیدہ سے اس کو منڈھوانے کے اخراجات کم سے کم ہوں۔  
 [غول اور عرض دونوں گہرائی کے دو چند ہونے چاہئیں]  
 ۱۳۔ مستطیلی متوازی السطوح کے تین متقاطع کناروں کا مجموعہ معلوم ہے۔ اس کی  
 شکل دریافت کرو کہ سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔

۱۴۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جو ایک کرہ کے اندر بن سکتا  
 ہے کعب ہے۔

۱۵۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جس کی بیرونی سطح معلوم ہو  
 کعب ہے۔

۱۶۔ بند بیضوی منحنی میں بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ  
 رأسوں پر کے تماس بمقابل کے اضلاع کے متوازی ہیں۔

۱۷۔ بند بیضوی منحنی کے گرد کم سے کم رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ  
 اضلاع کی نقاط تماس پر نصف ہوتی ہے۔

۱۸۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے وہ  
 متساوی الاضلاع مثلث ہے اور کم سے کم رقبہ والا مثلث جو دائرہ کے گرد بن سکتا ہے  
 وہ بھی متساوی اضلاع والا مثلث ہے۔

۱۹۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا کثیر الاضلاع جس کی تعداد اضلاع  $n$  دی ہوئی ہو  
 اور جو ایک دائرہ کے اندر بن سکے غنیمت کثیر الاضلاع ہو گا نیز  $n$  اضلاع کا کم سے کم  
 رقبہ والا کثیر الاضلاع جو ایک دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی غنیمت کثیر الاضلاع ہے۔

۲۰۔ یہ مان کر معلوم کیجئے کہ بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے  
 تباد کہ اس سے فوراً یہ کس طور پر مستند ہوتا ہے کہ دے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم

گھیرے والا مستطیل مربع ہے۔

اسی طور پر اوپر کے سوالات ۱۳ اور ۱۵ سے کیا نتائج اخذ ہو سکتے ہیں۔

۲۱۔  $n$  اضلاع کا کثیر الاضلاع معلوم کیجئے کہ لئے جس کا رقبہ اعظم ہو یا معلوم  
 رقبہ کے لئے جس کا کم ہو اقل ہو غنیمت کثیر الاضلاع ہو گا۔

[اشک ۱ سوال ۲۴ کا نتیجہ مان لو]۔

اس سے ثابت کرو کہ معلوم گیر کے لئے اعظم رقبہ کی شکل یا معلومہ رقبہ کے لئے اقل گھیرے کی شکل دائرہ ہوگی۔  
 ۲۲۔ ٹیپہ خانہ (پوسٹ آفس) کے قواعد کی رو سے پارسل کے طول اور گھیرے کا مجموعہ ۶ فٹ سے زیادہ نہیں ہونا چاہئے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے حجم والا پارسل جو بھیجا جاسکتا ہے وہ ایک اسطوانہ ہے جو طول میں ۲ فٹ اور گھیرے میں ۴ فٹ ہو۔ اس کے حجم کا مجموعہ ۲۵۵۴۶ مکعب فٹ ہوگا۔

## امثلہ ۱۹

### چھوٹے تغیرات

- ۱۔ ثابت کرو کہ لوکارتمی تماسوں کی جدول میں اساس ۱۰ محسوب کئے گئے ہوں ۶۰ کی پروسس میں ایک منٹ کے لئے فرق تقریباً ۰۰۰۲۹ ہے۔
- ۲۔ ایک بینج کی بلندی ب اس کے پایہ سے فاصلہ اور زاویہ ارتفاع (عما) مشاہدہ کرنے سے معلوم کی گئی ہے، ثابت کرو کہ مشاہدہ شدہ ارتفاع میں خطا صف عما کے جواب میں خطا ہے  
 مغب = ۱۰ قسط عما صف عما  
 اگر ۱۰۰ = افٹ، عما = ۳۰ اور زاویہ میں خطا آ ہو تو ثابت کرو کہ مغب = ۳۴، ۱۰ بیج۔
- ۳۔ ۱۰ کا جذر الکعب دریافت کرو، یہ معلوم ہے کہ ۱۰۰ کا جذر الکعب ۴۶۶۲۲ ہے۔ (۴۶۶۵۰۰)
- ۴۔ لوگ ۱۰ = ۲۵۳۰۲۶ معلوم ہے، لوگ ۱۰ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔  
 جواب ۱۔ (۴۶۶۱۵۱)
- ۵۔ ضد لوکارتموں (ما = ۱۰) کی جدول میں ۴ کے محاذی اندراج ۲۵۱۱۸۸۶ ہے، ۵۰۰۰ کے ضد لوکارتم دریافت کرو۔ (ص = ۴۶۶۲۶۹۴)  
 جواب ۱۔ (۲۵۵۱۲۱۶۹)
- ۶۔ لوگ تماس سے ایک زاویہ دریافت کیا جائیگا۔ اگر لوگ تماس کے

نسبہ کر نہیں چلی ۱۔۔۔۔۔ رہ گئی ہو تو قوسی سکندول میں زراویہ کی خطا دریافت کرو، زراویہ ۳۰ کی پیمائش میں ہے۔ [۲۰.۵۶]

۷۔۔۔۔۔ لوک قاطعوں کی جدول میں جو اس میں ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہیں، ایک منٹ کے لئے فرق ۳۰ کی پیمائش میں تقریباً ۰.۰۰۰۰ ہوگا۔

۸۔۔۔۔۔ معلوم ہے جنس ۵ = ۲۰.۹۹، جنس ۱۰ = ۵۱.۰۰ کی قیمت محسوب کرو۔

۹۔۔۔۔۔ مسنر ۵۵ = ۲۰.۹۹، مسنر ۱۰ = ۵۱.۰۰ کی قیمت معلوم کرو۔ [۲۰.۹۹]

۱۰۔۔۔۔۔ اگر فضا (لا) مسلسل اور قابل تفرق ہو سوائے قیمت (لا) = [۲۰.۹۹] یہ لامتناہی ہو جاتا ہے تو ثابت کرو کہ فضا (لا) بھی لامتناہی ہوگا۔

۱۱۔۔۔۔۔ ماسی برق بہا میں سوئی کے انحراف کا ماس برقی رو کے متناسب ہوتا ہے ثابت کرو کہ قرأت کی سلاخ خطا کے جواب میں جو رو کی محصلہ قیمت میں متناسب

نکلا ہوگی وہ کم سے کم ہوگی جبکہ انصراف ۴۵ ہو۔

۱۲۔۔۔۔۔ ایک عدد کے محور پر ایک نقطہ اور اس کی تصویر یا خیال کے فاصلے

عدد سے (لا) (لا) ذیل کے رشتہ سے مربوط ہیں  $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u}$

ثابت کرو کہ کسی چھوٹی شے کی طولی تضعیف  $(\frac{1}{f})$  ہے۔

۱۳۔۔۔۔۔ ایک کرنیک و پ، و کے گرد زادی رفتار سے گزرتے گھومتے ہیں،

ایک اصل سلاخ پ ق پ پر عمل کر دی گئی ہے اور ق ایک ثابت نالی

و کے میں حرکت کرنے کے لئے مجبور ہے، ثابت کرو کہ ق کی رفتار سے و میں ہے

جہاں سے ایسا نقطہ ہے جس پر خط ق پ (محدود بشرط ضرورت) و میں سے گزرتا ہے

و کے پر عمودی خط سے ملتا ہے۔

۱۴۔۔۔۔۔ ایک جسم کی کثافت (س) ہو اور باقی میں اسکے اوزان بالترتیب (و) سے

سے حال کی گئی ہے، ثابت کرو کہ تو۔۔۔۔۔ کے خطا و مف و مف و کے جواب میں کثافت کی متناسب خطا ہوگی۔

$$\frac{\text{مف}}{\text{س}} = \frac{\text{و}}{\text{و}} + \frac{\text{مف}}{\text{و}} + \frac{\text{مف}}{\text{و}}$$

۱۵۔ ایک کرہ کا نیم قطر ر ہوا اور پانی میں تولنے سے نکلا گیا ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{مف ر}}{\text{ر}} = \frac{\text{مف و} - \text{مف و}^۲}{۳ (۲ - ۱ - ۲)} \quad \text{جہاں و}^۲ \text{ بالترتیب ہوا اور پانی کے اندر وزن ہیں۔}$$

۱۶۔ ناقص کے رقبہ (س) کی خطا جبکہ نیم محوروں ا، ب کے ناپے میں چھوٹی خطائیں ہوں یہ ہوگی

$$\frac{\text{مف س}}{\text{س}} = \frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}}$$

۱۷۔ اگر مثلث کے تینوں اضلاع ا، ب، ج ناپے جائیں تو اضلاع کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے زاویہ (ا) کی خطا ہوگی

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{ج}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} - \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}}$$

۱۸۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے ایک ضلع ا اور متصل زاویوں

(ج، ب) کے ناپے سے حاصل کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ پیمائش کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے رقبہ میں متناسب غلطی ہے

$$\frac{\text{مف ق}}{\text{ق}} = ۲ \frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}}$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر تصدیق کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے اضلاع کے طولوں ا، ب، ج سے محسوب کیا گئے، اگر ایک ہی مقدار ع سے ا کو گھٹایا اور ب کو بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ اسکی وجہ سے رقبہ میں تبدیلی ہوگی

$$\frac{\text{مف ق}}{\text{ق}} = \frac{۲ (ا - ب) ع}{ج - (ا - ب)}$$



۲۰۔ ایک مثلث کا ارتفاع قاعدہ ۱ اور قاعدہ پر کے زاویوں جب ج کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، اگر ناپنے میں خطائیں مف ب، مف ج ہوں تو ارتفاع میں متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{جب ج}}{\text{مف ب}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{مف ج}} = \frac{\text{جب ج ب}}{\text{مف ج ب}}$$

۲۱۔ مثلث (ج ب ج) کو ذرا سا بدلا گیا ہے لیکن اس طور پر کہ یہ اُسی پہلے دائرہ کے اندر بن سکتا ہے، ثابت کرو

$$\frac{\text{مف ۱}}{\text{ج ب ۱}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{ج ب ۲}} + \frac{\text{مف ج}}{\text{ج ب ۳}} = \frac{\text{مف ج ب}}{\text{ج ب ج}}$$

۲۲۔ چار دائروں کے جوڑنے سے (ج ب ج) ایک مستوی چارضلعی شکل بنائی گئی ہے جسکی شکل بڑھ سکتی ہے۔ اگر قطروں (ج ب) کے طول (۱) (۲) (۳) ہوں تو ان کے طولوں کے لالہ تباہی چھوٹے تغیرات ذیل کے ذریعہ ملو ط ہونگے  
جب (ج ب ج) (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰) (۱۰۱) (۱۰۲) (۱۰۳) (۱۰۴) (۱۰۵) (۱۰۶) (۱۰۷) (۱۰۸) (۱۰۹) (۱۱۰) (۱۱۱) (۱۱۲) (۱۱۳) (۱۱۴) (۱۱۵) (۱۱۶) (۱۱۷) (۱۱۸) (۱۱۹) (۱۲۰) (۱۲۱) (۱۲۲) (۱۲۳) (۱۲۴) (۱۲۵) (۱۲۶) (۱۲۷) (۱۲۸) (۱۲۹) (۱۳۰) (۱۳۱) (۱۳۲) (۱۳۳) (۱۳۴) (۱۳۵) (۱۳۶) (۱۳۷) (۱۳۸) (۱۳۹) (۱۴۰) (۱۴۱) (۱۴۲) (۱۴۳) (۱۴۴) (۱۴۵) (۱۴۶) (۱۴۷) (۱۴۸) (۱۴۹) (۱۵۰) (۱۵۱) (۱۵۲) (۱۵۳) (۱۵۴) (۱۵۵) (۱۵۶) (۱۵۷) (۱۵۸) (۱۵۹) (۱۶۰) (۱۶۱) (۱۶۲) (۱۶۳) (۱۶۴) (۱۶۵) (۱۶۶) (۱۶۷) (۱۶۸) (۱۶۹) (۱۷۰) (۱۷۱) (۱۷۲) (۱۷۳) (۱۷۴) (۱۷۵) (۱۷۶) (۱۷۷) (۱۷۸) (۱۷۹) (۱۸۰) (۱۸۱) (۱۸۲) (۱۸۳) (۱۸۴) (۱۸۵) (۱۸۶) (۱۸۷) (۱۸۸) (۱۸۹) (۱۹۰) (۱۹۱) (۱۹۲) (۱۹۳) (۱۹۴) (۱۹۵) (۱۹۶) (۱۹۷) (۱۹۸) (۱۹۹) (۲۰۰) (۲۰۱) (۲۰۲) (۲۰۳) (۲۰۴) (۲۰۵) (۲۰۶) (۲۰۷) (۲۰۸) (۲۰۹) (۲۱۰) (۲۱۱) (۲۱۲) (۲۱۳) (۲۱۴) (۲۱۵) (۲۱۶) (۲۱۷) (۲۱۸) (۲۱۹) (۲۲۰) (۲۲۱) (۲۲۲) (۲۲۳) (۲۲۴) (۲۲۵) (۲۲۶) (۲۲۷) (۲۲۸) (۲۲۹) (۲۳۰) (۲۳۱) (۲۳۲) (۲۳۳) (۲۳۴) (۲۳۵) (۲۳۶) (۲۳۷) (۲۳۸) (۲۳۹) (۲۴۰) (۲۴۱) (۲۴۲) (۲۴۳) (۲۴۴) (۲۴۵) (۲۴۶) (۲۴۷) (۲۴۸) (۲۴۹) (۲۵۰) (۲۵۱) (۲۵۲) (۲۵۳) (۲۵۴) (۲۵۵) (۲۵۶) (۲۵۷) (۲۵۸) (۲۵۹) (۲۶۰) (۲۶۱) (۲۶۲) (۲۶۳) (۲۶۴) (۲۶۵) (۲۶۶) (۲۶۷) (۲۶۸) (۲۶۹) (۲۷۰) (۲۷۱) (۲۷۲) (۲۷۳) (۲۷۴) (۲۷۵) (۲۷۶) (۲۷۷) (۲۷۸) (۲۷۹) (۲۸۰) (۲۸۱) (۲۸۲) (۲۸۳) (۲۸۴) (۲۸۵) (۲۸۶) (۲۸۷) (۲۸۸) (۲۸۹) (۲۹۰) (۲۹۱) (۲۹۲) (۲۹۳) (۲۹۴) (۲۹۵) (۲۹۶) (۲۹۷) (۲۹۸) (۲۹۹) (۳۰۰) (۳۰۱) (۳۰۲) (۳۰۳) (۳۰۴) (۳۰۵) (۳۰۶) (۳۰۷) (۳۰۸) (۳۰۹) (۳۱۰) (۳۱۱) (۳۱۲) (۳۱۳) (۳۱۴) (۳۱۵) (۳۱۶) (۳۱۷) (۳۱۸) (۳۱۹) (۳۲۰) (۳۲۱) (۳۲۲) (۳۲۳) (۳۲۴) (۳۲۵) (۳۲۶) (۳۲۷) (۳۲۸) (۳۲۹) (۳۳۰) (۳۳۱) (۳۳۲) (۳۳۳) (۳۳۴) (۳۳۵) (۳۳۶) (۳۳۷) (۳۳۸) (۳۳۹) (۳۴۰) (۳۴۱) (۳۴۲) (۳۴۳) (۳۴۴) (۳۴۵) (۳۴۶) (۳۴۷) (۳۴۸) (۳۴۹) (۳۵۰) (۳۵۱) (۳۵۲) (۳۵۳) (۳۵۴) (۳۵۵) (۳۵۶) (۳۵۷) (۳۵۸) (۳۵۹) (۳۶۰) (۳۶۱) (۳۶۲) (۳۶۳) (۳۶۴) (۳۶۵) (۳۶۶) (۳۶۷) (۳۶۸) (۳۶۹) (۳۷۰) (۳۷۱) (۳۷۲) (۳۷۳) (۳۷۴) (۳۷۵) (۳۷۶) (۳۷۷) (۳۷۸) (۳۷۹) (۳۸۰) (۳۸۱) (۳۸۲) (۳۸۳) (۳۸۴) (۳۸۵) (۳۸۶) (۳۸۷) (۳۸۸) (۳۸۹) (۳۹۰) (۳۹۱) (۳۹۲) (۳۹۳) (۳۹۴) (۳۹۵) (۳۹۶) (۳۹۷) (۳۹۸) (۳۹۹) (۴۰۰) (۴۰۱) (۴۰۲) (۴۰۳) (۴۰۴) (۴۰۵) (۴۰۶) (۴۰۷) (۴۰۸) (۴۰۹) (۴۱۰) (۴۱۱) (۴۱۲) (۴۱۳) (۴۱۴) (۴۱۵) (۴۱۶) (۴۱۷) (۴۱۸) (۴۱۹) (۴۲۰) (۴۲۱) (۴۲۲) (۴۲۳) (۴۲۴) (۴۲۵) (۴۲۶) (۴۲۷) (۴۲۸) (۴۲۹) (۴۳۰) (۴۳۱) (۴۳۲) (۴۳۳) (۴۳۴) (۴۳۵) (۴۳۶) (۴۳۷) (۴۳۸) (۴۳۹) (۴۴۰) (۴۴۱) (۴۴۲) (۴۴۳) (۴۴۴) (۴۴۵) (۴۴۶) (۴۴۷) (۴۴۸) (۴۴۹) (۴۵۰) (۴۵۱) (۴۵۲) (۴۵۳) (۴۵۴) (۴۵۵) (۴۵۶) (۴۵۷) (۴۵۸) (۴۵۹) (۴۶۰) (۴۶۱) (۴۶۲) (۴۶۳) (۴۶۴) (۴۶۵) (۴۶۶) (۴۶۷) (۴۶۸) (۴۶۹) (۴۷۰) (۴۷۱) (۴۷۲) (۴۷۳) (۴۷۴) (۴۷۵) (۴۷۶) (۴۷۷) (۴۷۸) (۴۷۹) (۴۸۰) (۴۸۱) (۴۸۲) (۴۸۳) (۴۸۴) (۴۸۵) (۴۸۶) (۴۸۷) (۴۸۸) (۴۸۹) (۴۹۰) (۴۹۱) (۴۹۲) (۴۹۳) (۴۹۴) (۴۹۵) (۴۹۶) (۴۹۷) (۴۹۸) (۴۹۹) (۵۰۰) (۵۰۱) (۵۰۲) (۵۰۳) (۵۰۴) (۵۰۵) (۵۰۶) (۵۰۷) (۵۰۸) (۵۰۹) (۵۱۰) (۵۱۱) (۵۱۲) (۵۱۳) (۵۱۴) (۵۱۵) (۵۱۶) (۵۱۷) (۵۱۸) (۵۱۹) (۵۲۰) (۵۲۱) (۵۲۲) (۵۲۳) (۵۲۴) (۵۲۵) (۵۲۶) (۵۲۷) (۵۲۸) (۵۲۹) (۵۳۰) (۵۳۱) (۵۳۲) (۵۳۳) (۵۳۴) (۵۳۵) (۵۳۶) (۵۳۷) (۵۳۸) (۵۳۹) (۵۴۰) (۵۴۱) (۵۴۲) (۵۴۳) (۵۴۴) (۵۴۵) (۵۴۶) (۵۴۷) (۵۴۸) (۵۴۹) (۵۵۰) (۵۵۱) (۵۵۲) (۵۵۳) (۵۵۴) (۵۵۵) (۵۵۶) (۵۵۷) (۵۵۸) (۵۵۹) (۵۶۰) (۵۶۱) (۵۶۲) (۵۶۳) (۵۶۴) (۵۶۵) (۵۶۶) (۵۶۷) (۵۶۸) (۵۶۹) (۵۷۰) (۵۷۱) (۵۷۲) (۵۷۳) (۵۷۴) (۵۷۵) (۵۷۶) (۵۷۷) (۵۷۸) (۵۷۹) (۵۸۰) (۵۸۱) (۵۸۲) (۵۸۳) (۵۸۴) (۵۸۵) (۵۸۶) (۵۸۷) (۵۸۸) (۵۸۹) (۵۹۰) (۵۹۱) (۵۹۲) (۵۹۳) (۵۹۴) (۵۹۵) (۵۹۶) (۵۹۷) (۵۹۸) (۵۹۹) (۶۰۰) (۶۰۱) (۶۰۲) (۶۰۳) (۶۰۴) (۶۰۵) (۶۰۶) (۶۰۷) (۶۰۸) (۶۰۹) (۶۱۰) (۶۱۱) (۶۱۲) (۶۱۳) (۶۱۴) (۶۱۵) (۶۱۶) (۶۱۷) (۶۱۸) (۶۱۹) (۶۲۰) (۶۲۱) (۶۲۲) (۶۲۳) (۶۲۴) (۶۲۵) (۶۲۶) (۶۲۷) (۶۲۸) (۶۲۹) (۶۳۰) (۶۳۱) (۶۳۲) (۶۳۳) (۶۳۴) (۶۳۵) (۶۳۶) (۶۳۷) (۶۳۸) (۶۳۹) (۶۴۰) (۶۴۱) (۶۴۲) (۶۴۳) (۶۴۴) (۶۴۵) (۶۴۶) (۶۴۷) (۶۴۸) (۶۴۹) (۶۵۰) (۶۵۱) (۶۵۲) (۶۵۳) (۶۵۴) (۶۵۵) (۶۵۶) (۶۵۷) (۶۵۸) (۶۵۹) (۶۶۰) (۶۶۱) (۶۶۲) (۶۶۳) (۶۶۴) (۶۶۵) (۶۶۶) (۶۶۷) (۶۶۸) (۶۶۹) (۶۷۰) (۶۷۱) (۶۷۲) (۶۷۳) (۶۷۴) (۶۷۵) (۶۷۶) (۶۷۷) (۶۷۸) (۶۷۹) (۶۸۰) (۶۸۱) (۶۸۲) (۶۸۳) (۶۸۴) (۶۸۵) (۶۸۶) (۶۸۷) (۶۸۸) (۶۸۹) (۶۹۰) (۶۹۱) (۶۹۲) (۶۹۳) (۶۹۴) (۶۹۵) (۶۹۶) (۶۹۷) (۶۹۸) (۶۹۹) (۷۰۰) (۷۰۱) (۷۰۲) (۷۰۳) (۷۰۴) (۷۰۵) (۷۰۶) (۷۰۷) (۷۰۸) (۷۰۹) (۷۱۰) (۷۱۱) (۷۱۲) (۷۱۳) (۷۱۴) (۷۱۵) (۷۱۶) (۷۱۷) (۷۱۸) (۷۱۹) (۷۲۰) (۷۲۱) (۷۲۲) (۷۲۳) (۷۲۴) (۷۲۵) (۷۲۶) (۷۲۷) (۷۲۸) (۷۲۹) (۷۳۰) (۷۳۱) (۷۳۲) (۷۳۳) (۷۳۴) (۷۳۵) (۷۳۶) (۷۳۷) (۷۳۸) (۷۳۹) (۷۴۰) (۷۴۱) (۷۴۲) (۷۴۳) (۷۴۴) (۷۴۵) (۷۴۶) (۷۴۷) (۷۴۸) (۷۴۹) (۷۵۰) (۷۵۱) (۷۵۲) (۷۵۳) (۷۵۴) (۷۵۵) (۷۵۶) (۷۵۷) (۷۵۸) (۷۵۹) (۷۶۰) (۷۶۱) (۷۶۲) (۷۶۳) (۷۶۴) (۷۶۵) (۷۶۶) (۷۶۷) (۷۶۸) (۷۶۹) (۷۷۰) (۷۷۱) (۷۷۲) (۷۷۳) (۷۷۴) (۷۷۵) (۷۷۶) (۷۷۷) (۷۷۸) (۷۷۹) (۷۸۰) (۷۸۱) (۷۸۲) (۷۸۳) (۷۸۴) (۷۸۵) (۷۸۶) (۷۸۷) (۷۸۸) (۷۸۹) (۷۹۰) (۷۹۱) (۷۹۲) (۷۹۳) (۷۹۴) (۷۹۵) (۷۹۶) (۷۹۷) (۷۹۸) (۷۹۹) (۸۰۰) (۸۰۱) (۸۰۲) (۸۰۳) (۸۰۴) (۸۰۵) (۸۰۶) (۸۰۷) (۸۰۸) (۸۰۹) (۸۱۰) (۸۱۱) (۸۱۲) (۸۱۳) (۸۱۴) (۸۱۵) (۸۱۶) (۸۱۷) (۸۱۸) (۸۱۹) (۸۲۰) (۸۲۱) (۸۲۲) (۸۲۳) (۸۲۴) (۸۲۵) (۸۲۶) (۸۲۷) (۸۲۸) (۸۲۹) (۸۳۰) (۸۳۱) (۸۳۲) (۸۳۳) (۸۳۴) (۸۳۵) (۸۳۶) (۸۳۷) (۸۳۸) (۸۳۹) (۸۴۰) (۸۴۱) (۸۴۲) (۸۴۳) (۸۴۴) (۸۴۵) (۸۴۶) (۸۴۷) (۸۴۸) (۸۴۹) (۸۵۰) (۸۵۱) (۸۵۲) (۸۵۳) (۸۵۴) (۸۵۵) (۸۵۶) (۸۵۷) (۸۵۸) (۸۵۹) (۸۶۰) (۸۶۱) (۸۶۲) (۸۶۳) (۸۶۴) (۸۶۵) (۸۶۶) (۸۶۷) (۸۶۸) (۸۶۹) (۸۷۰) (۸۷۱) (۸۷۲) (۸۷۳) (۸۷۴) (۸۷۵) (۸۷۶) (۸۷۷) (۸۷۸) (۸۷۹) (۸۸۰) (۸۸۱) (۸۸۲) (۸۸۳) (۸۸۴) (۸۸۵) (۸۸۶) (۸۸۷) (۸۸۸) (۸۸۹) (۸۹۰) (۸۹۱) (۸۹۲) (۸۹۳) (۸۹۴) (۸۹۵) (۸۹۶) (۸۹۷) (۸۹۸) (۸۹۹) (۹۰۰) (۹۰۱) (۹۰۲) (۹۰۳) (۹۰۴) (۹۰۵) (۹۰۶) (۹۰۷) (۹۰۸) (۹۰۹) (۹۱۰) (۹۱۱) (۹۱۲) (۹۱۳) (۹۱۴) (۹۱۵) (۹۱۶) (۹۱۷) (۹۱۸) (۹۱۹) (۹۲۰) (۹۲۱) (۹۲۲) (۹۲۳) (۹۲۴) (۹۲۵) (۹۲۶) (۹۲۷) (۹۲۸) (۹۲۹) (۹۳۰) (۹۳۱) (۹۳۲) (۹۳۳) (۹۳۴) (۹۳۵) (۹۳۶) (۹۳۷) (۹۳۸) (۹۳۹) (۹۴۰) (۹۴۱) (۹۴۲) (۹۴۳) (۹۴۴) (۹۴۵) (۹۴۶) (۹۴۷) (۹۴۸) (۹۴۹) (۹۵۰) (۹۵۱) (۹۵۲) (۹۵۳) (۹۵۴) (۹۵۵) (۹۵۶) (۹۵۷) (۹۵۸) (۹۵۹) (۹۶۰) (۹۶۱) (۹۶۲) (۹۶۳) (۹۶۴) (۹۶۵) (۹۶۶) (۹۶۷) (۹۶۸) (۹۶۹) (۹۷۰) (۹۷۱) (۹۷۲) (۹۷۳) (۹۷۴) (۹۷۵) (۹۷۶) (۹۷۷) (۹۷۸) (۹۷۹) (۹۸۰) (۹۸۱) (۹۸۲) (۹۸۳) (۹۸۴) (۹۸۵) (۹۸۶) (۹۸۷) (۹۸۸) (۹۸۹) (۹۹۰) (۹۹۱) (۹۹۲) (۹۹۳) (۹۹۴) (۹۹۵) (۹۹۶) (۹۹۷) (۹۹۸) (۹۹۹) (۱۰۰۰)

## امثلہ ۲۰

### ہندی استعمال

۱۔ اسکے لئے شرط کہ منحنی کا ماس مبدا میں سے گزرے یہ ہے  $\frac{م}{لا} = \frac{فرما}{فرلا}$

۲۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم  $ما = ۲ لا - ۱ منحنی$   $ما = لا + ۲ لا - ۱$  کا ماس ہے  
۳۔ ثابت کرو کہ خط  $ما = ۲ لا - ۱$  منحنی  $ما = لا + ۲ لا - ۱$  کا ماس ہے  
الگ الگ تقطیوں پر مس کرتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ منحنی  $ما = لا - ۶ لا + ۱۳ لا - ۱۱ لا + ۴$  خط مستقیم ہے  
۵۔ ثابت کرو کہ ماس مبدا سے اور جو ماس کنجہ کئے ہیں ان کے تقاطع تاس کے نقطہ پر ہوتا ہے۔

۵۔ منحنی  $ما = لا - ۶ لا + ۱۳ لا - ۱۱ لا + ۵$  پر نقطے معلوم کرو جو ان پر ماس

۱۔  $\frac{1}{2}$  کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان میں سے دو نقطوں پر ایک ہی مماس ہے۔  
۲۔ مبدأ سے نغنی  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  کے جو مماس کھینچ سکے ہیں ان کو مساواتیں دریافت کرو۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر مماس محور کے متوازی ہے شکل بناؤ۔  
۳۔ ایک نغنی کے کسی نقطہ کا مماس دو معین دونوں کھینچے گئے ہیں، معین کے پایہ سے مماس پر عمود نکال لیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ہے  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  (فرما  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$ ) اس لئے ثابت کرو کہ زنجیر  $\frac{1}{2}$  = ج جہن  $\frac{1}{2}$  میں یہ عمود مستقل ہے۔

۸۔ ثابت کر دو کہ مبدأ سے ماس پر عمود (۱۱-۱۰)  $\frac{فرقا}{فرقا}$   $\div \{i + (\frac{فرقا}{فرقا})\}$  (فرقا)  $\frac{۱}{۲}$  ہے۔  
 دائرہ  $MA = \sqrt{MA^2 - LA^2}$  کی صورت میں اس تصدیق کر دو کہ یہ عمود متقل ہے اور  
 قائم قطع زاہد  $LA = MA$  کی صورت میں  $\frac{MA^2}{MA^2 + LA^2}$  کے مساوی ہے۔  
 ۹۔ قوت نامی منحنی (شکل ۲۲ صفحہ ۱۱۰)  $MA = JB$  قوت میں ثابت کر دو کہ  
 زیر ماس متقل ہے اور زیر عماد  $\frac{MA}{JB}$  ہے۔  
 ۱۰۔ زنجیر  $MA = JB$  ج جہن  $\frac{MA}{JB}$  میں زیر ماس ج جہن  $\frac{MA}{JB}$  ہے، زیر عماد

$$\frac{1}{2} \text{ ج جنبر } \frac{2}{3} \text{ ج اور عماد } \frac{1}{3} \text{ ج ہے۔}$$

۱۱۔ منہی ماہ = رمضان لا کا تیرماس ن لا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ نغنی  $(\frac{9}{1})^n + (\frac{6}{1})^n = 2^n$  کی تمام قیمتوں کے لئے  
خط مستقیم  $\frac{9}{1} + \frac{6}{1} = 2$  کو نقطہ (و'ب) پر مس کرتا ہے۔

۱۱۔ جیموں کے منحنی  $MA = JB$  جب  $\frac{LA}{J} = \frac{JB}{J}$  میں زیر تماس  $MS$   $\frac{LA}{J}$  ہے

زیر عماد  $\frac{1}{J} = \frac{JB}{J} = \frac{JB}{J}$  اور عماد  $B$  جب  $\frac{LA}{J} = \left[ 1 + \frac{JB}{J} \right]$

۱۲۔ ثابت کرو کہ منحنی  $MA = JB$  جب  $MA = JB$  قوس

ان نقطوں پر پس کرتے ہیں جہاں پر  $MA = JB = 2\pi + \frac{\pi}{2}$  جبکہ صحیح عدد ہے

۱۵۔ ثابت کرو کہ مبداء میں سے خطوں کا ایک جوڑا ایسا کھینچ سکتا ہے کہ ہر ایک خط ان تمام غیموں کو مس کرے جو مسادات  $MA = JB$  میں ج ج کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک متحرک نقطہ کی رفتار (۶) کو معین اور رقبہ مرسمہ کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عماد سے تعبیر ہوگا۔

۱۷۔ ایک ذرہ کی توانائی بالفعل  $\left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$  کو معین اور فضا میں کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ قوت منحنی کے وصال سے تعبیر ہوتی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ مختصات  $MA = JB = 2\pi + \frac{\pi}{2}$   $MA = JB = 1$

کے ماسوں کی مساواتیں بالترتیب ذیل کی شکلوں میں لکھی جاسکتی ہیں

$$MA = JB = 2\pi + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{LA}{J} + (1 - \frac{LA}{J}) \right\} = \frac{MA}{JB} + \frac{LA}{J} = 1$$

۱۹۔ خط  $MA = JB$  ج کے متوازی، مخروطی تراش فضا  $(MA)$  کے ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع ماس کے ملانے والے خط کی مسادات ہے

$$\frac{جف}{جف} = \frac{جف}{جف} + \frac{جف}{جف} = 1$$

۳۹

۲۰۔ محدود انحناء والے بند بیضوی منحنی کے وتر ایک ثابت سمت کے متوازی کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اس نظام میں کم از کم ایک وتر ایسا ضرور ہے جسکے سروں پر گئے ماس متوازی ہیں۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ناقص  $(لا = ا + جم + طہ + عہا)$ ،  $ما = ب + جم + طہ + جہا$  میں نقطہ طہ پر کا ماس نقطہ طہ میں سے گزرنے والے نیم قطر کے متوازی ہوگا اگر  $طہ - طہ = \pm \frac{\pi}{2}$ ۔

۲۲۔ ناقص  $(لا = ا + جم + طہ + ارجب طہ + ما = ب + جم + طہ + بارجب طہ)$  کے مدری محوروں کے جواب میں طہ کی قیمتیں دریافت کرو

$$[مس ۲ طہ = \frac{۲ (ا + ارجب طہ + بارجب طہ)}{ا + ب - ارجب طہ}]$$

۲۳۔ اس کے لئے شرط کہ منحنی فصہ  $(لا، ما) =$  کا عماد مبدا میں سے گزرے یہ ہے  $لا جف فصہ - ما جف فصہ = \frac{جف لا}{جف ما}$ ۔

محرومی تراش  $(لا + ا + ۲ ه لا + ما + جب ما = ا کے مدری محوروں کی مساوات دریافت کرو۔$

۲۴۔ اگر  $ب < ۲$  اور تو مبدا سے مکانی  $لا = ا + ۲ (ما + ب)$  کے تین حقیقی ماس کھینچ سکتے ہیں۔

۲۵۔ قائم زائد  $لا - ما = ا$  کے کسی نقطہ پر کا عماد محدودوں کے محوروں پر جو نقطہ بتاتا ہے انہیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ زائد  $لا = گ + ت$ ،  $ما = گ + ب$  کے ماس کی مساوات

$$لا + ت = ما + ۲ گ + ت ہے۔$$

۲۷۔ اگر  $لا + ما = ا$  تو ثابت کرو کہ  $لا + ما$  اعظم ہوگا جبکہ  $لا = \pm ما$  منحنی کو قسم کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ  $لا + ما = ا$  سے اس کا نیچہ سے زیادہ نیم قطری ہوتا ہے۔

۱۸۹ اس ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ مکانی  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\text{جب } \frac{1}{\text{ط}}}$  میں جہاں ماسکے قطب ہے  $\text{فہ} = \frac{1}{\text{ط}}$ 

اس لئے ثابت کرو کہ ماس ماسکی فاصلہ اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔

۲۹۔ ایک منحنی پر دو متصل نقطے پ پ لے گئے ہیں خطوط مستقیم پ پ پ پ نیم نظروں پر علی القوائم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ پ پ کی انتہائی قیمت جبکہ

پ پ پر منطبق ہو  $\frac{\text{فر}}{\text{ط}}$  ہے۔

۳۰۔ فہ وہ زاویہ ہے جو منحنی کا ماس مبداء میں سے گزرنیوالے سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتا ہے ثابت کرو کہ

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{لا} \frac{\text{فر}}{\text{ط}} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما} \frac{\text{فر}}{\text{ط}}}$$

۳۱۔ قائم قطع زائد ر جم طہ = ر میں ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نیم قطر اور ماس کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں سمت میں مستقل ہیں۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ منحنی  $\frac{1}{r} = \text{ف}(\text{طہ})$  کے ماس کی مساوات نقطہ

طہ = صہ پر ہے

$$\frac{1}{r} = \text{ف}(\text{صہ}) \text{ جم } (\text{طہ} - \text{صہ}) + \text{ف}(\text{صہ}) \text{ جب } (\text{طہ} - \text{صہ})$$

اس لئے ثابت کرو کہ مخروطی تراش  $\frac{1}{r} = 1 + \text{ر جم طہ}$  کے ماس کی مساوات ہے

$$\frac{1}{r} = \text{ر جم طہ} + \text{جم} (\text{طہ} - \text{صہ})$$



141

# پانچواں باب

## اعلیٰ رتبہ کے مشققات

۶۴۔ تعریف اور ترقیم۔ اگر ما متغیر لا کا تفاعل ہو تو مشتق تفاعل

فرما بھی عموماً لا کما قال تفرق تفاعل ہوگا۔ فرما کو تفرق کرنے کا نتیجہ

دوسرے تفرقی سر یا دوسرا شوق کہلاتا ہے اور اگر یہ پھر تفرق کے قابل ہے تو نتیجہ کو تیسرا تفرقی سر یا تیسرا شوق کہتے ہیں اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ والے مشتقوں کے لئے اگر فیے کو اس عمل کی علامت تصور کیا جائے تو پہلے دو سرے تیسرے

..... ن دیں مشفقوں کو بالترتیب حسب ذیل علامات سے ظاہر کیا جائیگا

فر ۱، فر ۲، فر ۳، ..... (فر ۱۰)

انکی زیادہ مائٹنگل ہے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ،  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ، .....  $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلا}}$ ، انہیں اوپر کی علامت کا اختصار سمجھنا چاہئے۔

نیز دفعہ ۲۵ کے مطابق  $\frac{\text{فر}}{\text{وزن}}$  کے بجائے عفا لکھنے سے ہیں

عَفَا عَفَا عَفَا مَا عَفَا مَا ..... عَفَا مَا مائل بیوقوف۔



عفتا = بهرجب (به ۹ +  $\frac{۲}{۳}$ )

یا بطرز دیگر

اور اس کے عفو = بہ واجب (بہ +  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ )

اور اس کے

اور شکل عامہ 
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (9)$$

اورنگ علی خان

مثال ۴- اگر  $\Gamma_A = \text{جم جبهه لا} \dots \dots \dots (۱۰)$

مثال ۴ -

تو عفا و = به جب به لا عفا ما = به جم به لا عفا و = به جب به لا عفا ما = به جم به لا ... (11)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

یا عرف ما = بدجم (بدب +  $\frac{\pi}{r}$ )

اس لئے عفاً = بہ' جم (بہا +  $\frac{\pi}{2}$  +  $\frac{\pi}{2}$ )

اور شکل عامہ عفت ما = بدن جم (بدن لا +  $\frac{\pi c}{r}$ ) ..... (۱۲)

اور شکل عامہ

شمال ۵۔ اگر ماہ <sup>۱۴۰۱</sup> جمادی الثانی ..... (۱۲)

مثال ۵۔

تو عفا ما = قو (ع. جم. ب. لا - ب. جب. ب. لا)  
عفا ما = قو (ع. ب. لا - جم. ب. لا - ع. جب. ب. لا) (۱۳)

عفا ما فوقه { (ع<sup>٢</sup> - ب<sup>١</sup>) جميد - (ع<sup>٢</sup> - ج<sup>١</sup>) جميد } - (ج<sup>٣</sup>)

اسی طرح اگر  $\mu = \mu_0$  جب یہ ..... (۱۵)

اسی طرح اگر  $m = \text{موجب عدد}$  ..... (۱۵)

تو عفا ما = قو { عدا جب به لا + به جم به لا }  
عفا ما = قو { عدا - به لا + به جم به لا }

عفا = قو { (عنا - بنا) جیب بنلا + عیب جیب بنلا } (۱۹)

ان صورتوں میں ص = ح جم طہ 'بہ = رجب طہ ..... (۱۴)

ان صورتوں میں  $\text{ع} = \text{م} + \text{ج} + \text{ط}$ ،  $\text{ب} = \text{ر} + \text{ج} + \text{ط}$ ، ..... (۱۶)



رکھنے سے عام نمونہ دریافت ہو سکتا ہے۔ کیونکہ اسکی مدد سے

عف (عو) جم بہلا = فو (جم بہلا + جم بہلا) جم بہلا

= فو (جم بہلا + طہ)

اور اس نتیجہ کو بار بار استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

عف (فو) جم بہلا = فو (جم بہلا + ن طہ) .... (۱۸)

اسی طرح عف (فو جب بہلا) = فو جب (بہلا + ن طہ) .... (۱۹)

مثال ۶۔ اگر ما = لوگ لا ..... (۲۰)

تو عف ما = لا<sup>۱</sup> عف ما = لا<sup>۲</sup> عف ما = (۱-) (۲-) لا<sup>۳</sup> .....

اور شکل ما ہے عف ما = (۱-) (۲-) (۳-) x ..... (ن-) (۱-) لا<sup>ن</sup>

= (۱-) لا<sup>ن</sup> (ن-) ..... (۲۱)

۶۵۔ مائل ضرب کے متواتر مشتقات۔ لیبنیز کا مسئلہ۔

اگر ع اور و تغیر لا کے تفاعل ہوں تو دفعہ ۳۱ (۲۰) کی رو سے

عف (عو) = ع + عف ع + ع ع و ..... (۱)

اگر اسے ہم دوبارہ تفریق کریں تو

عف ع (عو) = عف (وعف ع) + عف (ع ع و)

اب مذکور بالا ضابطہ کے مطابق

عف (وعف ع) = وعف ع + عف ع + ع ع و

اور عف (ع ع و) = عف ع + ع ع و + ع ع و

پس عف ع (عو) = وعف ع + ع ع و + ع ع و + ع ع و ..... (۲)

$\text{عفا}(\text{ع و}) = \text{عفا} + \text{عفا} + \text{عفا} + \frac{\text{عفا}(\text{ن-ا})}{\text{ن}}$

..... ن عفا عفا ن- او عفا و.....

ابن میں تمہوں کے سرور ہی ہیں جو مسئلہ تائی میں ہوتے ہیں۔ ابن مسئلہ کو ثابت کرنے دریافت کیا نتیجہ (۳) کی صداقت ثابت کر نیکی لئے ع و کے چند اجتہاد فی مشغور کے ماسا کرتے کے طریقے پر غور کرو۔

کے مسائل کرنے کے طریقے پر عبور کرو۔  
ہم مشقوں کے لئے زیرکی ترسیم استعمال کریں گے  
پس عفا (عو) = عو + عو ..... (۴)  
اس کو دوبارہ تفسیق کرنے سے

عفا (ع و) = ع + و + ع + و + ع + و ..... (۵)

اگلے تفرق سے حاصل ہوتا ہے کہ

عفا (ع و) = ع + و + ع + و + ع + و

اس آخری ضابطہ کی پہلی سطر ضابطہ (۵) کی ہر رقم کے پہلے متغیر کو تفریق کرنے سے حاصل ہوئی ہے اور دوسری سطر دوسرے متغیر کو تفریق کرنے سے۔ پس حاصل ہوا کہ

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ضابطہ (۱) کی ۱۰ ویں رقم کا عددی سر ضابطہ ۵

کی ر ویں اور (۱-۲) ویں رقموں کے عددی سروں کا مجموعہ۔ متواتر قدموں کے طرز سے ظاہر ہے کہ یہ قاعدہ اگلے مشتقوں کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ اب عین ہی قاعدہ (۱+ج) کی متواتر قیمتوں کے حسب ذیل ہیں۔  
مرتب کرنے کا ہے اور چونکہ عف (ع و) کے سر دی ہیں جو (۱+ج) کی پہلی  
توت کے سر میں تو ثابت ہوا کہ عف (ع و) - جیسا کہ - سر دی جو  
جو (۱+ج) کے پھیلاؤ میں ہوتے ہیں -

مثال ۱۔ اگر  $ما = لا ع$  ..... (۸)

تو  $عفا = لا عفا + ن عفا + ع$  .....  
چونکہ  $عفا = لا$ ۔

(۹) .....  $لا عفا + ن عفا = ع$

پس اگر  $ما = لا جب بہ لا$  ..... (۱۰)

تو  $عفا = لا عفا (جب بہ لا) + ۲ عفا (جب بہ لا)$

(۱۱) .....  $بہ لا جب بہ لا + ۲ جب بہ لا =$

نیز اگر  $ما = لا لوگ لا$  ..... (۱۲)

تو  $عفا = لا عفا (لوگ لا) + ن عفا (لوگ لا)$

(۱۳) .....  $(1-)\frac{1-ن}{1-ن} + (1-)\frac{2-ن}{1-ن} =$

پس  $عفا = (1-)\frac{2-ن}{1-ن}$  ..... (۱۳)

مثال ۲۔ اگر  $ما = فو ع$  ..... (۱۴)

تو  $عفا = فو عفا + ن عفا + ع$  .....  
چونکہ  $عفا = فو$ ۔

(۱۵) .....  $فو = [عفا + ن عفا + ع] =$

پس اگر  $ما = فو جب بہ لا$  ..... (۱۶)

تو  $عفا = فو عفا (جب بہ لا) + ۲ عفا (جب بہ لا) + (جب بہ لا)$

(۱۷) .....  $فو = \{ (ر-ب) جب بہ لا + ۲ ب جب بہ لا \}$

۲۶۔ حرکیات کی مثالیں :- تفرضی احصا کے حرکیاتی اطلاعات میں  
اور یہ ضابطہ دفعہ ۲۴ (۱۶) کے مطابق ہے۔

دوسرا مشتق خاص حصہ لیتا ہے۔ چنانچہ خطی حرکت کی صورت میں اگر ثابت مبدا سے فاصلہ میں ہو تو دفعہ ۲۶ میں ہم نے درج کیا ہے کہ رفتار اس اور اسراع ع ذیل کے ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$۱ = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \quad \text{ع} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \quad (۱)$$

پس موجودہ ترقیم کے مطابق  $\text{ع} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \left( \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \right) = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}}$  (۲) .....  
یعنی بلحاظ وقت کے اس کا دوسرا مشتق اسراع کی پیمائش کرتا ہے۔  
نیز دفعہ ۲۶ کی ترقیم میں ثابت محور کے گرد ایک جسم کا زاویہ اسراع ہے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{وقت}} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}} \quad (۳)$$

مثال ۱۔ اگر اس وقت کا دوجہ تفاعل ہو یعنی فرض کرو کہ

$$\text{مس} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ت} + \text{ج} \quad (۴)$$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = ۲ \text{ا} + \text{ب}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = ۱۲ \quad (۵)$$

یعنی اسراع مستقل ہے۔

مثال ۲۔ مادہ موسیقی حرکت میں

$$\text{مس} = \text{ا} + \text{جم} (\text{ن} + \text{ت} + \text{صہ}) \quad (۶)$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \text{ن} + ۱ \text{جب} (\text{ن} + \text{ت} + \text{صہ})$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \text{ن} + ۱ \text{جم} (\text{ن} + \text{ت} + \text{صہ}) = \text{ن} + \text{اس} \quad (۷)$$

یعنی اسراع ہمیشہ ایک ثابت نقطے اس کے مبدا کی سمت میں کی طرف اور اس نقطہ سے

فاصلہ کے متناسب ہے۔  
مثال ۳۔ اگر میں = (اجز ن ت + جب جز ن ت) ... (۸)  
تو  $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \text{ن (اجز ن ت + جب جز ن ت)}$

اور  $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \text{ن (اجز ن ت + جب جز ن ت + ن اس) ... (۹)}$   
یعنی اسرار ثابت نقطہ سے مخالف سمت میں ہے اور فاصلہ کے متناسب ہے۔

#### ۶۷۔ تقعر اور تحدب۔ نقاط انعطاف۔

جیسے فضا (لا) دفعہ ۲۶ کے مطابق فضا (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپا ہے  
ویسے ہی فضا (لا) بھی فضا (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپا ہے۔ پس اگر  
فضا (لا) مثبت ہے تو منفی

ماہ فضا (لا) ..... (۱)  
کا ڈھال لا کے ساتھ بڑھ رہا ہے اور اگر فضا (لا) منفی ہے تو ڈھال لا کے  
ساتھ گھٹا رہا ہے۔

اگر فضا (لا) ڈھال کے بدلنے کی شرح ایک لمحہ کے لئے صفر ہے  
اور یہاں ماس ماسن ہے اس کی سادہ مثال نقطہ انعطاف ہے یعنی وہ نقطہ  
جس پر منفی ماس کو عبور کرے (دیکھو شکل ۴۰)۔

جو نقطہ جب کی عین قربت میں ہے کلیتہاً جب کے ماس کے اوپر واقع ہو۔ نیز اسے  
اوپر کی طرف محدب کہتے ہیں جبکہ وہ کلیتہاً ماس کے نیچے واقع ہو۔

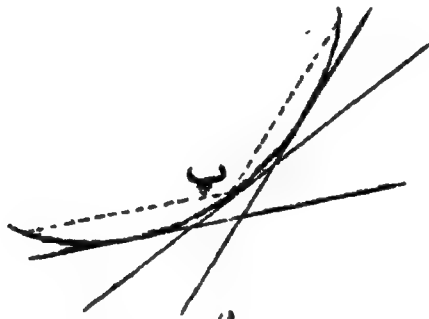
اگر خمی کا وہ حصہ جو پ کی دائیں جانب ہے نقطہ پ کے ماس کے اوپر  
واقع ہو (جیسے کہ شکل ۳۹ میں) تو دفعہ ۵۶ سے صاف ظاہر ہے کہ جب کے  
دائیں جانب کی سمت میں (خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ ایسے نقطے  
پائے گئے جو پ پر فضا (لا) کی مثبت نقطہ پ پر اہمیت سے زیادہ ہو۔ پس

دفعہ ۸ کے مطابق نقطہ پ پر فمّا (لا) کی قیمت منحنی نہیں ہو سکتی۔ اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کے بائیں جانب ہے پ کے ماس کے اوپر واقع ہو تو بھی یہی نتیجہ قائم رہے گا۔

اسی طرح اگر منحنی کے نقطہ پ کے دائیں یا بائیں جانب کا حصہ پ کے ماس کے نیچے واقع ہو تو فمّا (لا) کی قیمت نقطہ پ پر مثبت نہیں ہو سکتی۔

پس اس بحث سے حاصل ہوا کہ منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو گا اگر فمّا (لا) مثبت ہو اور اوپر کی طرف محدب ہو گا اگر فمّا (لا) منفی ہو۔

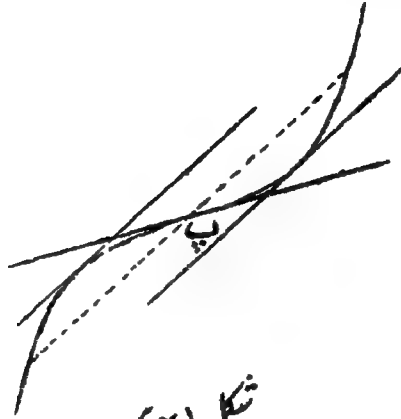
نیز یہ ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر (جہاں منحنی اپنے ماس کو عبور کرتا ہے) فمّا (لا) یہ مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی۔ اور چونکہ اس کو محدود فرض کر لیا گیا ہے اس لئے اس کا صفر ہونا لازمی ہے۔ یہ شرط اگرچہ ضروری ہے لیکن کافی نہیں۔



شکل (۳۹)

اس کے علاوہ یہ ضروری ہے کہ جب 'لا' کی قیمت بڑھتے بڑھتے زیر بحث قیمت میں سے گزرے تو فمّا (لا) کی علامت بدلے۔ مثلاً فرض کرو کہ پ کے بائیں جانب منحنی ماس کے نیچے ہے اور دائیں جانب اوپر ہے۔ دفعہ ۵ سے ظاہر ہے کہ منحنی کے دائیں اور بائیں جانب پ کے قریب میں ایسے نقطہ ہونگے جن پر ڈھال پ کے ڈھال سے بڑا ہے۔ یعنی ڈھال کی پ پر اقل قیمت ہے اور اس لئے دفعہ ۵ کے مطابق فمّا (لا) کی علامت

منفی سے مثبت ہونی چاہئے۔



شکل (۴۰)

اگر منفی ماس کو مذکورہ بالا سمت سے مخالف سمت میں عبور کرتا ہے تو پ پر  
دھال کی اعظم قیمت ہوگی اور قدر (لا) کی علامت مثبت سے منفی ہوگی۔  
مثال ۱۔ اگر  $ما = لا^۲$  ..... (۲)

تو  $ما = لا^۲$  جیسے لا کی قیمت صفر میں سے گزرتے ہوئے بڑھتی ہے ویسے ما کی قیمت  
منفی سے مثبت ہوتی ہے اور اس لئے یہ نقطہ انعطاف ہے۔ شکل ۳۱ (صفحہ ۱۴۸)  
دیکھو۔

مثال ۲۔ اگر  $ما = \frac{لا^۲}{لا + ۱}$  ..... (۳)

تو  $ما = \frac{لا(لا - ۳)}{(لا + ۱)^۲}$

اس میں تین نقاط انعطاف ہیں یعنی جبکہ  $لا = ۰$  اور  $لا = ۱$  اور  $لا = ۳$  شکل ۱۳  
دیکھو۔

مثال ۳۔ جب کے منفی  $ما = ب$  جب  $لا = \frac{۱}{ب}$  ..... (۴)

کی صورت میں  $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$  جب  $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$  --

پس  $\frac{ب}{ا}$  علامت بدلتا ہے اس لئے وہ تمام نقاط جن پر منفی  $\frac{ب}{ا}$  محور کو کاٹتا ہے  
نقاط انعطاف ہیں دیکھو شکل ۱۲ (صفحہ ۱۲۲)۔

مثال ۴ - منفی  $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$  ..... (۵) میں  $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$  ۱۲  
نقطہ  $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$  پر  $\frac{ب}{ا}$  صفر ہو جاتا ہے لیکن اسکی علامت نہیں بدلتی۔ پس ساکن ماس  
تو ہے لیکن صحیح معنوں میں نقطہ انعطاف نہیں ہے۔ یہ ماس بات سے بھی ظاہر ہے کہ  
 $\frac{ب}{ا}$  لازماً مثبت ہے اور پورا منفی مبداء کے ماس کے ایک ہی جانب واقع ہوتا ہے۔

۶۸ - اقل اور اعظم قیمتوں میں شوق کا استعمال۔

تفاعل فضا (لا) کی اقل اور اعظم قیمتوں میں امتیاز کرنے کی جانچ جو دو فضا  
۵۱ میں بیان کی گئی ہے وہ دوسرے شوق فضا (لا) کے رقوم میں بھی بالعموم  
بیان ہو سکتی ہے۔

چونکہ فضا (لا) خود فضا (لا) کا شوق ہے اس لئے ظاہر ہے کہ اگر  
فضا (لا) مثبت ہے جبکہ لا کی قیمت بڑھتے بڑھتے فضا (لا) = کی ایک  
اصل میں سے گزرتی ہے تو فضا (لا) لازماً بڑھ رہا ہے اور اس لئے  
اسکی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ پس فضا (لا) اس مقام پر اقل  
اسی طرح اگر فضا (لا) منفی ہے جبکہ فضا (لا) = تو لازماً فضا (لا)  
گھٹ رہا ہے اور اس لئے اس کی علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے۔  
پس اس مقام پر فضا (لا) کی اعظم قیمت ہے۔

ان نتیجوں کا تقعر اور تحدب کے ساتھ ربط بالکل ظاہر ہے۔  
مثال ۱ - ثابت کرو کہ خطی حرکت میں مبداء سے فاصلہ ماس کی قیمت اقل یا اعظم  
ہوگی جبکہ فضا  $\frac{ب}{ا}$  صفر ہو اور اسلئے  $\frac{ب}{ا}$  بالترتیب مثبت  
یا منفی ہو۔



$$\text{مثال ۲} - \text{فہ (لا) = } \frac{۲}{۱+۲} \text{ فہ (لا) = } \frac{۲}{۳}$$

تو دفعہ ۵ کی مثال میں دکھایا گیا ہے کہ فہ (لا) = ۱ اور لا = ۱ کے لئے صفہ ہوتا ہے۔ نیز دفعہ ۶ کی مثال (۲) میں فہ (لا) کی معلوم قیمت حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فہ (۱) = ۱ - اور فہ (۱) = ۱}$$

پس لا = ۱ سے تفاعل فہ (لا) کی اعظم قیمت حاصل ہوتی ہے اور لا = ۱ کے اقل قیمت۔ دیکھو شکل ۱۳ (صفحہ ۲۰)۔

اب ماکس ہے کہ کوئی خاص قیمت جو فہ (لا) کو صفر بناتی ہے فہ (لا) کو صفر بنا دے۔ ایسی صورت میں آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہاں پر باوجود فہ (لا) کی نقل اور اعظم قیمت نہیں ہوتی۔ دیکھو شکل ۱۴ (صفحہ ۲۰) لیکن یہاں اس پر بحث جاری رکھنا مفید نہ ہوگا۔ تاہم تفاعل پندرھویں باب میں ٹیلر کے مسئلہ سے حاض کیا جائیگا۔

## ۶۹۔ مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات۔

متواتر مشتق تفاعل مساواتوں کے نظریہ میں بڑا اہم حصہ رکھتے ہیں۔ دفعہ ۵۰ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ اگر فہ (لا) منطوق صغریٰ تفاعل ہو تو فہ (لا) = کی کم از کم ایک اصل فہ (لا) = کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ضرور ہوگی۔ اسی طرح فہ (لا) = کی کم از کم ایک اصل فہ (لا) = کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ہوگی۔ اور اسی طرح باقی مشتقوں کے لئے۔ نیز چونکہ فہ (لا) = کی رتبہ کی اصل فہ (لا) = کی (۱-رتبہ) کی اصل ہوگی اس لئے یہ فہ (لا) = کی (۲-رتبہ) کی اصل ہوگی۔ اور اسی طرح وہ بالآخر فہ (لا) = کی ایک رتبہ کی سادہ اصل ہوگی۔ پس فہ (لا) = کی (۱-رتبہ) کی اصل ہوئے سے نمروہی اور کانی شرط یہ ہے کہ تفاعل



$$\left\{ \begin{array}{l} (۱) + (ج - ۱) + (۱ - ۱) = (۱ - ۱) فسا \\ (۲) + (ج - ۱) + (۱ - ۱) = (۱ - ۱) فسا \\ (۳) + (ج - ۱) + (۱ - ۱) = (۱ - ۱) فسا \end{array} \right.$$

ایک تفاعل فَا (لا) ایسا فرض کرو کہ

$$فَا (لا) = فسا (لا) - (۱ + ج - ۱) (۱ - ۱) \dots (۵)$$

یعنی فَا (لا) منہی (۱) اور (۳) کے معینوں کا فرق ہے۔ مفروض سے فَا (لا) منفر ہے جبکہ  $لا = ۱ - ۱$  اور  $لا = ۱$  پس دفعہ ۴۹ سے مشتق تفاعل فَا (لا) بتغیر  $لا$  کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔

$$\left\{ \begin{array}{l} (۶) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) \\ (۷) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) \end{array} \right.$$

جہاں  $ط > ۱$  نیز چونکہ فَا (لا) صفر ہے  $لا = ۱$  اور  $لا = ۱ + ۱$  کے لئے اس لئے

$$(۸) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) \dots (۶)$$

جہاں  $ط > ۱$  اس دلیل کو دوبارہ استعمال کرنے سے چونکہ فَا (لا) صفر ہے جبکہ  $لا = ۱ - ط$  اور  $لا = ۱ + ط$  اس لئے اس کا مشتق تفاعل فَا (لا) بھی  $لا$  کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ یعنی

$$(۹) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) \dots (۸)$$

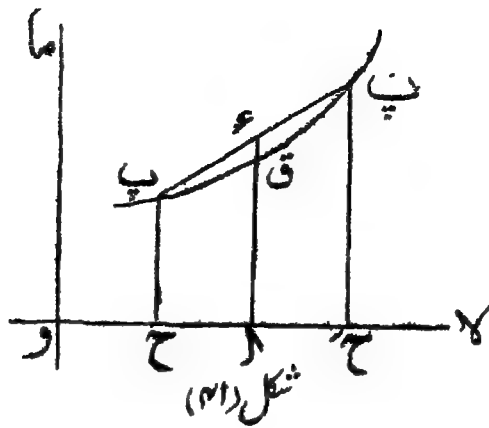
جہاں  $ط$  ایسی مقدار ہے جو کسور۔  $ط$  اور  $ط$  کے درمیان واقع ہے اور اس لئے ضروری طور پر  $۱ \pm$  کے درمیان ہے۔

$$\left\{ \begin{array}{l} (۱۰) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) - ۲ ج \\ (۱۱) + (ط - ۱) = (ط - ۱) فَا (لا) - ۲ ج \end{array} \right.$$

چونکہ ضابطہ (۵) سے فَا (لا) = فسا (لا) - ۲ ج اس سے ثابت ہوا کہ  $ط$  کی  $۱ \pm$  کے درمیان کسی خاص قیمت کے لئے

اب (۴) کے غلطیوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$r = (h-1)f + (1)f = (h-1)f + f = hf$$



اور اس لئے  $ع ق = ۱۶ - ق ا$

$\frac{1}{4} = \{ ۲ ف ما (۱) + ف ما (۵-۱) \}$   
اب ضابطہ (۱۳) اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ انتہا میں

$$ع ق = \frac{1}{4} (ح ا) \times ف ما (۱) \dots\dots\dots (۱۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ وتر کا قوس کے اوپر یا نیچے ہونا ف ما (۱) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ غنی (۱) اور (۳) کے تین نقاط تقاطع میں سے دو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، یعنی ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ  $ا = ۱۶$  کے لئے دو غنی ایک دوسرے کو نہ صرف کاٹتے ہیں بلکہ تسکس کرتے ہیں اور نقطہ  $ا = ۱۶ + ۵$  پر وہ ایک دوسرے کو پھر کاٹتے ہیں۔

نقطہ  $ا = ۱۶$  پر دونوں منحنيوں کے لئے ما اور  $\frac{ما}{لا}$  کی ایک ہی قیمت ہونے کے لئے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\begin{cases} ۱۶ + ج ا = ۱۶ + ح ا = ف ما (۱) \\ ۱۶ + ۲ ج ا = ۱۶ = ف ما (۱) \end{cases} \dots\dots\dots (۱۷)$$

اور تیسری شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ

(۱۸)  $(ا + ح) = (ا + ہ) + ج = (ا + ہ) + ۲ = فہا (ا + ہ) \dots (۱۸)$   
اگر فا (لا) سے وہی تفاعل تعمیر ہو جس کا اوپر بیان ہوا تو

فا (ا) = ۰ اور فا (ا + ہ) = ۰ ..... (۱۹)

اور اس لئے فا (ا + طہ، ہ) = ۰ ..... (۲۰)

جہاں  $طہ > ا$

نیز چونکہ فا (لا) صفر ہے لا = ا اور لا = (ا + طہ، ہ) کے لئے اسلئے

فا (ا + طہ، ہ) = ۰ ..... (۲۱)

جہاں  $طہ < ا$

اب ضابطے (۱۴) اور (۱۸) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

فہا (ا + ہ) = - فہا (ا) - فہا (ا) = جہا ..... (۲۲)

پس (۹) اور (۲۱) سے

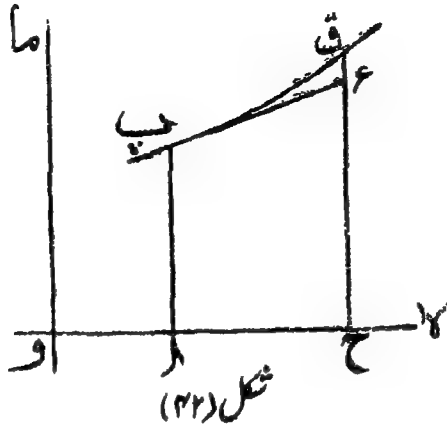
فہا (ا + ہ) = فہا (ا) + فہا (ا) +  $\frac{۱}{۲}$  فہا (ا + طہ، ہ) ..... (۲۳)

یہ نتیجہ نہایت اہم ہے اور بعد ازاں معلوم ہو گا کہ یہ سیر کے مسئلہ کی لگائی شکل کی خاص صورت ہے (دیکھو پندرہواں باب)۔ اس شکل میں مسئلہ کا صرف اتنا حصہ شریک ہے جسکی بالعموم حرکت کی اور طبیعیاتی سوالات میں اکثر ضرورت پڑتی ہے۔  
نتیجہ (۲۳) سے اخذ ہوتا ہے

نہا  $فہا (ا + ہ) - فہا (ا) - فہا (ا) = \frac{۱}{۲} فہا (ا) \dots (۲۴)$

شکل ۴۲ میں فرض کرو کہ  $ا = ا$  اور  $ا = ح = ہ$  اور اپ 'ح' ق  
بالترتیب ان نقاط کے معین ہیں۔ اگر ق ح نقطہ پ پر کے ماس کو  
۶ پر لے تو

ق. ح = فہا (ا + ہ) 'ع ح = فہا (ا) + فہا (ا)



پس ضابطہ (۲۲) اس بات کی صداقت کا اظہار کرتا ہے کہ انتہا میں  
 ق = ع =  $\frac{1}{4}$  (ا ح)  $\times$  فئا (ا) ..... (۲۵)  
 پس نقطہ تماس کے قریب میں تماس سے منحنی کا ہٹاؤ عموماً دوسرے رتبہ کی چھوٹی  
 مقدار ہوتا ہے۔ اگر فئا (ا) = ۰ تو ق ع کی علامت ھ کے ساتھ  
 نہیں بدلتی اور ج کے عین قریب میں منحنی کا کلیتاً تماس کے اوپر یا نیچے واقع ہونا  
 فئا (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہوگا۔ دیکھو دفعہ ۶۰  
 انحنائے نظریہ میں ضابطوں (۱۶) اور (۲۵) کا دلچسپ استعمال ہے۔ دیکھو  
 رسواں باب۔

### ۱۔ اجزائے تناسب کا نظریہ۔

فرض کرو کہ منحنی  $ما = فئا (ا)$  ..... (۱)  
 اور مکافی  $ما = (ا + ج لا + ج لا)$  ..... (۲)  
 نقاط  $لا = ا$ ،  $لا = ا + ج$ ،  $لا = ا + ج + ج$  پر قطع کرتے ہیں جہاں  $ا < ج$ ،  
 ہم معلوم کرتے ہیں  
 (۱-ا) فئا (ا) + فئا (ا + ج) - فئا (ا + ج + ج) = (ا - ج) فئا (ا + ج) ..... (۳)  
 اور اس لئے دفعہ سابق کے طریقہ کے مطابق

جہاں اے گڑھا۔

دفعہ ۷۔ کے مسائل اس ضابطہ کی خاص صورتیں ہیں اور اسے یہاں اس لئے بیان کیا گیا ہے کہ اس کا متناسب اجزاء کے نظریہ سے خاص تعلق ہے۔ فرض کرو کہ تفاعل (۱) کی قیمتیں (۱) کی متعدد قیمتوں کے لئے (جو ایک دوسرے کے مساوی فرق ہوں) جدول کی شکل میں درج کی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ (۱) کی ان قیمتوں میں سے ایک قیمت (۱) ہے اور (۱) کی قیمت مطلوب ہے جبکہ (۱) اور متصل جدولی قیمت (۱) + ۱ کے درمیان کہیں واقع ہو مثلاً (۱) + ۱ = ۱ + ۱ = ۱۔ جہاں (۱) سے (۱)۔ اب متناسب اجزاء کے طریقے میں اور ان یہ فرض کر کے کیا جاتا ہے کہ تفاعل (۱) = ۱ سے (۱) = ۱ + ۱ = ۱ + ۱ = ۱۔

$$(5) \dots\dots\dots \frac{y}{1} = \frac{f_n(a+y) - f_n(a)}{f_n(a+1) - f_n(a)}$$

یا فضا (۱+۱) = (۱-۱) فضا (۱) + (۱) فضا (۱+۱) ... (۲)  
 اس عمل میں یہ فرض کر لیا جائے کہ (۱) = (۱) اور (۱) = (۱) + (۱) کے درمیان منحنی (۱)  
 کی قوس کی بجائے وتر لے لینے سے قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔ ضابطہ (۴)  
 سے اس مفروضہ کی خطا حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۵۱ مثال ۲ سے ظاہر ہے کہ خفی (۱-۱) کی اعظم قیمت  $\frac{1}{2}$  ہے۔  
پس اگر حدود  $(۱) = ۱$  اور  $(۱) = ۱ + ۱$  کے درمیان فقہ (۱) کی بڑی سے بڑی قیمت  
میں سے ظاہر کریں تو ضابطہ (۳) سے ثابت ہوتا ہے کہ خطا  $\frac{1}{2}$  ہٹا کر  $\frac{1}{2}$  سے  $(۱)$   
مثال ۱- سات عشریہ لوکار فی جدول میں  $۱۰۰۰$  سے  $۱۰۰۰۰$  تک  
ایک ایک کے وقف پر تمام صحیح حدودوں کے لوکار تم دہج ہیں۔ اب اگر

ض (ا) = لوگ لا ..... (۸)

تو فضا (۱۱) =  $\frac{ص}{ر}$  ..... (۹)



پس (۵) میں  $h = 1$  رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لوگ  $n$  اور لوگ  $(n+1)$  کے درمیان متناسب اجزاء کے طریقہ سے ادراج کرنے میں جو خطا سرزد

ہوتی ہے وہ  $\frac{1}{2} \times \frac{5419}{10000} \dots \dots \dots (10)$

سے بڑی نہیں ہے اس لئے اگر  $n = 1000$  تو بڑی سے بڑی خطا  $5419 \dots \dots \dots$  سے زیادہ نہیں ہے اور سات اعشاریہ تک کے جدول کے لئے یہ بالکل نظر انداز کی جاسکتی ہے نیز (۴) سے ظاہر ہے کہ جب کبھی  $f_m$  (لا) کی قیمت بڑی ہو تو اس طریقہ صحیح نتیجہ حاصل ہو سکتی ہے اس وقت کہا جاتا ہے کہ فرق بے قاعدہ ہیں۔

مثال ۲۔ اگر  $f_m$  (لا) = لوگ جب لا  $\dots \dots \dots (11)$   
تو  $f_m$  (لا) =  $m$  قم لا  $\dots \dots \dots (12)$

پس  $h = \frac{\pi}{1.08} = 2.91 \dots \dots$  رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{h} f_m$  (لا) =  $m$  قم لا  $\dots \dots \dots (13)$   
چونکہ قم لا =  $1.08$  اس لئے ظاہر ہے کہ آ کے وقفہ والے لوگ تاری جیب کے جدول میں ادراج کی خطا جبکہ زاویہ  $1.08$  سے کم ہے اعشاریہ کے ساتویں مقام میں زیادہ سے زیادہ نصف اکائی کی ہو سکتی ہے۔

### مثال ۲۱

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

- (۱)  $h$  ما = لا (۱) - لا (۲) عفا ما =  $2 - لا (۲) + لا (۱)$
- (۲)  $h$  ما =  $\frac{1}{3} م$  لا (۱) - لا (۲) عفا ما =  $م$  لا (۱) - لا (۲)
- (۳)  $h$  ما =  $\frac{1}{4} م$  لا (۱) - لا (۲) + لا (۳) عفا ما =  $\frac{1}{4} م$  لا (۱) - لا (۲) + لا (۳)
- (۴)  $h$  ما =  $\frac{1}{5} م$  لا (۱) - لا (۲) + لا (۳) - لا (۴) عفا ما =  $\frac{1}{5} م$  لا (۱) - لا (۲) + لا (۳) - لا (۴)
- (۵)  $h$  ما =  $\frac{1}{2} م$  لا (۱) - لا (۲) عفا ما =  $\frac{1}{2} م$  لا (۱) - لا (۲)



$$\begin{aligned}
 (۲۳) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۴) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۵) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۶) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۷) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۸) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۲۹) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو} \\
 (۳۰) \quad \text{عفا} = \text{ما} + \text{فو}
 \end{aligned}$$

(۳۱) اگر  $و = \{ (۱ + ۱) + ۱ \}$  تو ثابت کرو کہ

$$(۱ + ۱) \left( \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} \right) + \frac{۲}{۱} - \frac{۲}{۱} = ۱$$

(۳۲) اگر  $و = (۱ + ۱) = ۱$  (خاصیت) تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۲}{۱}} - \frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۲}{۱}}$$

## امثلہ ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ طبعی جیوب کی جدول میں جو آ کے وقفوں پر مرتب کی گئی ہو مناسب اجزاء کی خطا ۱۰۰۰۰۰۰ سے بھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

(۲) ثابت کرو کہ طبعی جیوب کی جدول میں ۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے مناسب اجزاء کا طبعی نتیجہ ناکام رہتا ہے۔ نیز دیکھا کہ ۵۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے اگر جیوب آ کے وقفوں پر دئے ہوئے ہوں تو خطا کی حد ۲۲۳۰۰۰۰۰ سے کم ہے۔

(۳) دیکھا کہ کارتی جیوب کی جدول میں مناسب اجزاء کا قاعدہ ۹۰ اور ۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے ناکام رہتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تغاٹ کے لئے مناسب اجزاء کے قاعدہ میں بڑی سے بڑی خطا ۲۵۰۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے کم سے کم ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ منحنی  $و = ۱$  لوگ  $و$  ہر جگہ اوپر کی طرف محدب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ منحنی  $و = ۱$  لوگ  $و$  ہر جگہ اوپر کی طرف مقعر ہے نیز اس کی ترکیب کھینچو۔

(۶) منحنی  $و = ۱$  ہوا کا اعظم معین اور نقطہ انعطاف دریافت کرو۔

نیز اس کی ترکیب کھینچو۔ [اعظم معین  $و = ۱$  کے جواب میں اور نقطہ انعطاف

$و = ۲$  کے جواب میں ہے۔]

(۷) دیکھا کہ منحنی  $و = ۱$  میں ایسے نقطوں پر انعطاف ہے جسکے لئے  $و = ۱$

اس کی ترکیب کھینچو۔  
(۸) منحنی ما = (۱) قوس کے اعظم اور اقل معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور اس کی ترکیب کھینچو۔

[ (۱) =  $\frac{1}{2}$  سے اعظم اور اقل معین حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰،  $\pm \frac{1}{2}$  سے نقاط انعطاف ]

(۹) قائل فضا (لا) مستقل ہے اور  $\frac{1}{2} = (ب - ۱)$  جبکہ  $۱ > لا > ۰$  جبکہ  $۱ > لا > ۰$  نیز  $\frac{1}{2} = ب - ۱$  لا  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  جبکہ  $۱ > لا > ۰$  جب

اور  $\frac{1}{2} = ب - ۱$  جبکہ  $۱ < ب$  ثابت کرو کہ فضا (لا) فضا (لا) مسلسل ہیں لیکن فضا (لا) غیر مسلسل ہے۔  
منحنی ما = فضا (لا) کی ترکیب کھینچو۔  
(۱۰) ثابت کرو کہ ما = لا (۱ - ۳) میں نقطہ (۲، ۱) پر نقطہ انعطاف ہے۔  
منحنی کو رسم کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ منحنی ما = لا (۱ - ۱) کے نقاط  $(\pm \frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  پر انعطاف ہے۔  
منحنی کو رسم کرو۔

(۱۲) منحنی ما =  $\frac{ب^2}{۱ + لا}$  کے نقاط انعطاف دریافت کرو [ (۱) =  $\pm \frac{1}{2}$  ]

(۱۳) ثابت کرو کہ منحنی ما =  $\frac{لا}{(۱ - لا)}$  پر  $(-۱، ۰)$  نقطہ انعطاف ہے۔  
منحنی کی ترکیب کھینچو۔

(۱۴) منحنی ما =  $\frac{لا^2}{۱ + لا}$  کی ترکیب کھینچو اور اس کے نقاط انعطاف

دریافت کرو۔ [ لا = ۱ ± ۱ ]

(۱۵) ثابت کرو کہ مخنی ما =  $\frac{۱ - لا}{۱ + لا}$  پرین نقاط انعطاف ہیں اور وہ ایک خط میں واقع ہیں، مخنی کی ترسیم کھینچو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات لا<sup>۵</sup> - لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا - ۱ = ۰ کی ایک تہری اہل ہے۔

(۱۷) ثابت کرو کہ مساوات لا<sup>۵</sup> - لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا - ۱ = ۰ کی ایک تہری اہل ہے نیز تمام اصلیں دریافت کرو۔

(۱۸) مخنی ما = ۱ - لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۲</sup> کو مترسم کرو اور اسکے اقل اور عظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۱۹) مخنی ما = لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> - لا<sup>۵</sup> کو مترسم کرو اور اسکے نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۲۰) مخنی ما = لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا - ۱ کے اقل اور عظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور مخنی کو مترسم کرو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ مخنی ما = لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۴</sup> - لا<sup>۵</sup> - ۱

اور ما = ۲(لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۴</sup> - لا<sup>۵</sup> - ۱) ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور نقطہ تماس پر عبور کرتے ہیں۔ مخنیوں کو مترسم کرو۔

(۲۲) دریافت کرو کہ مستطالات (ج ب) کی کیا قیمت ہونی چاہئے کہ مخنی ما = (لا<sup>۲</sup> + ج ب لا<sup>۳</sup> + ج ب لا<sup>۴</sup> + ج ب لا<sup>۵</sup>) پر لا =  $\frac{۱}{۲}$  نقطہ انعطاف ہو لا = ۱ - ۱ پر مخنی کا ماس لا محور کے متوازی ہو اور مخنی نقطہ (۱، ۱۳) میں سے گزرے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ مخنی ما =  $\frac{لا - لا + ۱}{لا + لا + ۱}$  پرین حقیقی نقاط انعطاف ہیں۔

(۲۴) مخنی ما = ۴ جب لا - جب لا<sup>۲</sup> پر پوڑ کے نقطے اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور مخنی کو مترسم کرو۔

(۲۵) اگر مخنی ما = ف (لا) کے دو متصل معین پ ن، پ ک ہوں اور اگر



# فہرست اصطلاحات

## صغاری احصاء

(حصہ اول)

Abscissa

Absolute value

Acceleration

Adiabatic relation

Amplitude

Anti-logarithm

Approximation

Arc

Asymptotes

Calculus

Catenary

Cartesian co-ordinates

Chord

Circular Functions

Circumscribed circle

Compression

Cone

فصل  
مطلق قیمت

اسراع

حرانداررشتہ

سمت

ضد لوگاریتم

تقریب

قوس

متقارب

احصاء

زنجیرہ

کارٹیزیائی محدد

وتر

دائری تفاعل

بیرونی یا حائلہ دائرہ

پچکاو

مخروط



Conservative point	متصل نقطے
Continuity	تسلسل
Convergency	استدقاق
Convergent (Series)	مستند سلسلہ
Crack	کرنیک
Cross-section	عمودی تراش
Curvature	انحناء
Curve	منحنی
Cylinder	اسطوانہ
Deflection	انحراف
Density	کثافت
Dependent variable	تابع متغیر
Derived function	مشتق تفاعل
Differentiable	قابل تفرق
Differentials	تفرقے
Differentiation	تفریق
Discontinuity	عدم یکس
Double root	دو بری حل
Dynamics	حرکات
Elasticity	جواب
Elimination	استبعاد
Ellipse	قطع بیضی
Ellipsoid	بیضی
Elemental function	قوت بنیادی
Frustum	بقعہ

Function	تفاعل
Galvanometer	مقناطیسی برقی پیمائش برقی روپیچا
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Graph	رسم
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hyperboloid	زائد نما
Image	خیال
Implicit function	تضمینی تفاعل
Inclination	میلان
Independent variable	متغیر تبوع
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinitesimal	صغاری، صغاریہ
Intercept	تقاطعہ یا مابینی حصہ
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Isolated points	تہا یا اکیلے نقطے
Kinetic energy	توانائی بالحرکت
Lens	عدسہ
Limit	اتہا
Limiting values	اتہائی، قیمنیں
Logarithm	لوگاریتم
Logarithmic function	لوگاریتمی تفاعل

Longitudinal magnification

طولی تضعیف

Lower limit

پہلی انتہا، نیچے کی حد

Magnification

تضعیف

Maximum

اعظم

Mean-value Theorem

اوسط قیمت کا مسئلہ

Mechanics

علم حیل

Multiple roots

ضعفی اصلیں

Node

عقدہ

Normal

عماد

Order

رتبہ

Ordinate

معتین

Oscillation

اہتزاز

Parabola

قطع مکانی

Paraboloid

مکانی نما

Parallelopiped

متوازی السطوح

Parameter

مبیل

Partial

جزوی

Perimeter

گھیرا، محیط

Pendulum

زقاص

Period

دور

Permutation

ترتیب

Polar Co-ordinates

قطبی مختد

Pole

قطب

Pressure

دباؤ

Principal axes

صدری محور

Radius Victor	سمتی نیم قطر
Range	وسعت، پیم
Rational	منطوق
Rectilinear motion	مستقیم حرکت
Representation	تعبیر
Rigid body	استوار جسم
Rigidity	استواریت
Roots	اصلیں
Sequence	تواتر
Sphere	کرہ
Spheroid	کرہ نما
Theory	نظریہ
Trascendental	ماورائی
Trignometry	علم مثلث
Unique	یکانہ
Upper limit	علوی انتہا، اوپر کی حد
Variable	تغییر
Variation	تغییر
Vector	سمتی
Vertical	انتصابی
Zone.	منطقہ



## (NOTATION)

## ترقیم

Sin $\infty$	جب لا
Cos $\infty$	جم لا
tan $\infty$	مس لا
cot $\infty$	مم لا
Sec $\infty$	قط لا
Cosec $\infty$	قم لا
$\text{Sin}^{-1}\infty, \text{Cos}^{-1}\infty, \text{tan}^{-1}\infty,$	جب لا، جم لا، مس لا،
$\text{Cot}^{-1}\infty, \text{Sec}^{-1}\infty, \text{Cosec}^{-1}\infty,$	مم لا، قط لا، قم لا،
Sine hyperbolic ( $\text{Sinh } \infty$ )	زائدی جیب (جبنا لا)
$\text{Sinh } \infty, \text{Cosh } \infty, \text{Tanh } \infty,$	جبنا لا، جمنا لا، مسنا لا،
$\text{Coth } \infty, \text{Sech } \infty, \text{Cosech } \infty,$	ممنا لا، قطنا لا، قمننا لا،
$\text{Sinh}^{-1}\infty, \text{Cosh}^{-1}\infty, \text{Tanh}^{-1}\infty,$	جبنا لا، جمنا لا، مسنا لا،
$\text{Coth}^{-1}\infty, \text{Sech}^{-1}\infty, \text{Cosech}^{-1}\infty,$	ممنا لا، قطنا لا، قمننا لا،
$\pi$	$\pi$
Exponent (e)	توت نام (قو) یا صرف (نو)
$e^{\infty}$	قو لا
$a^{\infty}$	لا لا
$\log_e \infty$	لوک لا [یا صرف لوک لا]
$\log_{10} \infty$	لوک لا
$\epsilon$	سہ یا صہ

$\infty$	$\infty$
Limit, Lt	انتها، نها
Lt. $f(x)=A$ $x \rightarrow \infty$	نها ف (لا) = A
differential (d)	فرقی (دفر)
differential coefficient ( $\frac{dy}{dx}$ )	تفرقی سر (فرما / فرلا)
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$	فرما، فرما، فرما، فرلا، فرلا، فرلا، فرلا
$\delta x, \delta y, \delta z$	مف لا، مف ما، مف ی
$dx, dy, dz$	فرلا، فرما، فری
$f'(x), f''(x)$	ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)
Operator (D)	عامل تفرق (دعف)
$Dy, D^2y, \dots$	عف ما، عف ما، عف ما، عف ما، عف ما
$y', y'', y'''$	ما، ما، ما، ما
Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$	جزوی تفرقی سر جف / جف لا
$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	جف ما، جف ما، جف ی، جف لا، جف لا، جف لا جف ما
$f(x)$	ف (لا)
$F(x)$	فا (لا)
$\phi(x)$	فما (لا)

# اشاریہ (INDEX.)

## اعلامیات متعلقہ

اتفاقی یا مشروط استدقاق ' ۱۶

اجزائے متناسب ' ۲۱۲

اجزائے متناسب کے ذریعہ اوراج ' ۲۱۳

استدقاق ' لامتناہی سلسلوں کا ' ۸، ۹

اصلیں، جبریہ مساواتوں کی ' ۱۴

اعظم اور اقل قیمتیں ' ۱۴۳

انتہائی قیمتیں ' ۱۰، ۵۴، ۵۵

انعطاف کے نقاط ' ۸

اوسط قیمت کا مسئلہ ' ۱۵۶

تصحیحات کا محسوب کرنا ' ۱۵۴

تضمینی تفاعل ' ۹۲ تا ۹۴، ۱۶۵

تغیر ' ۲۱

تفاعل، تعریف ' ۲۰

ہندی تعریف ' ۲۲

جبری اور مادرانی ' ۳۴

تضمینی ' ۹۲

مقلوب ' ۴۲، ۸۵



- تفاعل کا پورا تغیر ۱۵۹  
تفرق ' ۸۰ ' ۷۷ ' ۷۶ ' ۷۳ ' ۷۰ ' ۶۷ ' ۶۴ ' ۶۱ ' ۵۸ ' ۵۵ ' ۵۲ ' ۴۹ ' ۴۶ ' ۴۳ ' ۴۰ ' ۳۷ ' ۳۴ ' ۳۱ ' ۲۸ ' ۲۵ ' ۲۲ ' ۱۹ ' ۱۶ ' ۱۳ ' ۱۰ ' ۷ ' ۴ ' ۱ ' ۰
- تفرق ' ۹۳ ' ۸۵  
تفرق ' ۱۶۲ ' ۱۵۳  
تفرق اور متحد ' ۲۰۲  
ٹیل کا مسئلہ ' ۲۱۱  
جبری تفاعل کا تسلسل ' ۳۷ ' ۳۴  
جزوی مشتقات ' ۹۱  
جفت اور طاق تفاعل ' ۱۱۳  
دائرہ کا محیط ' ۴۶  
دائری تفاعل ' ۸۱ ' ۷۴ ' ۶۷ ' ۶۰ ' ۵۳ ' ۴۶  
دوسرا مشتق ' ۱۹۵  
اسکی ہندی تغیر ' ۲۰۷  
رول کا مسئلہ ' ۱۴۰  
زائدی تفاعل ' ۱۱۲ تا ۱۱۷  
زیر عماد ' ۱۶۷  
زیر عماد ' ۱۶۷  
ساکن قیمتیں ' تفاعلوں کی ' ۱۴۵  
ساکن عماد ' ۲۰۲  
صفاریات ' ۵۷  
ضعفی اصلیں ' مساواتوں کی ' ۲۰۶  
عدم تسلسل ' ۲۹  
علوی یا سفلی آنتہا ' گروہ کی ' ۳  
عماد کی مساوات ' ۱۷۱  
قوت نما تفاعل ' ۱۰۳ ' ۱۰۰

- میت ، ہوکی ، ۱۱۲  
 لامتناہی سلسلے ، ۱۵  
 لوکارتم کا تفرق ، ۱۲۲  
 لوکارتمی تفاعل ، ۱۱۷  
 لب نیز کا مسئلہ ، ۱۹۸  
 ماورائی تفاعل ، ۳۴  
 متغیر ، متبوع اور تابع ، ۲۰  
 مرآتیں کا نظریہ ، ۱۲۰ ، ۲۰۶  
 مسلسل تفاعل ، تعریف ، ۲۴  
 خاصیت ، ۲۵ ، ۴۷  
 مسلسل تغیر ، ۱  
 مشتق تفاعل ، تعریف ، ۶۸  
 ہندی توصیحات ، ۶۶  
 مقلوب تفاعل ، ۴۲ ، ۸۵  
 مقلوب دائری تفاعل ، ۴۴ ، ۸۶ تا ۸۹  
 ماس ، منحنی کا ، ۶۷ ، ۱۷۰  
 منحنی کا ڈھال ، ۶۷  
 منطق صحیح تفاعل ، ۳۴  
 منطق کسر تریسہیں ، ۳۶  
 نظریہ ، مساواتوں کا ، ۱۴۰  
 نقشی یا ہم ارتفاع خطوط ، ۹۳  
 ہندی تعبیر ، مقداروں کی ، ۲  
 ہندی تفاعل کی ، ۲۲



